Chapitre 11 – Les probabilités

A) Rappels de seconde

1) Vocabulaire

a) Expérience aléatoire :

C'est une expérience dont le résultat (alea = dé en latin) dépend du hasard.

b) Issue

C'est un résultat possible de l'expérience aléatoire.

c) Univers :

C'est l'ensemble des issues, soit l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire (notation : Ω = oméga majuscule).

d) Événement :

C'est un sous-ensemble de l'univers, c'est à dire un ensemble d'issues de l'expérience..

e) Événement élémentaire :

C'est un sous-ensemble de l'univers ne contenant qu'un élément (c'est à dire une seule issue).
On peut par abus de langage assimiler un événement élémentaire à son issue et parler ainsi de la probabilité d'une issue.

f) Contraire :

C'est l'événement contraire d'un événement A, noté $\bar{A}$, est l'ensemble des issues (éléments) de l'univers qui ne sont pas dans A.

g) $A \cap B$:

L'événement $A \cap B$ (lire A inter B), aussi appelé «A et B», est l'ensemble des issues qui sont dans A et dans B à la fois.

h) $A \cup B$:

L'événement $A \cup B$ (lire A union B), aussi appelé «A ou B» , est l'ensemble des issues qui sont dans A ou dans B ou dans les deux.

i) Événements disjoints :

Deux événements A et B sont «incompatibles» ou «disjoints» si A et B n'ont aucune issue en commun, donc aucun élément commun ($A \cap B = \emptyset$).

j) Exemple :

Dans ma trousse, j'ai 3 crayons (1 noir, 1 bleu et 1 rouge) et trois stylos billes dans les mêmes couleurs.
Je considère l'expérience aléatoire suivante : "prendre un objet dans la trousse".
On aura :

Ω = ?	*{Cn ; Cb ; Cr ; Sn ; Sb ; Sr}*
A = "prendre un crayon" = ?	*{Cn ; Cb ; Cr}*
B = "Prendre un rouge" = ?	*{Cr ; Sr}*
$\bar{A}$ = ?	*{Sn ; Sb ; Sr}*
C = "Prendre un bleu" et B sont ?	*incompatibles*

2) Lois de probabilité

a) Préambule

Nous n'envisagerons que des problèmes où l'univers est fini (le nombre de résultats possibles de l'expérience aléatoire est limité).

b) Définition

On appelle loi de probabilité une application qui à chaque événement associe un nombre compris entre 0 et 1 et qui a les propriétés suivantes :

- **La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires contenus dans cet événement.**
- **La probabilité de l'événement constitué par l'univers lui-même est égale à 1, (autrement dit, la somme des probabilités de tous les événements élémentaires de l'univers est égale à 1).**

Exemples :

1) Reprenons l'exemple de la trousse : la probabilité correspond au nombre de chances de sortir un objet divisé par le nombre total de chances.
Si j'ai 1 chance sur 10 de sortir le crayon noir, 2 chances sur 10 de sortir le crayon bleu, 5 chances sur 10 de sortir le crayon rouge (disons que c'est le plus gros…), 1 chance sur 10 de sortir le stylo rouge, 1 sur 10 pour le stylo noir et 1 sur 10 pour le stylo bleu, ceci définit-il une probabilité valide ?

(Non, la somme dépasse 1, c'est donc impossible !)

Si on met 4 au lieu de 5 pour le crayon rouge, cela fait-il une probabilité valide ?

(oui, cette fois ça va)

2) Prenons un dé à 6 faces bien équilibré : quelle est normalement la probabilité de tirer un 2 ?

(1chance sur 6, soit 1/6)

Et si le dé est truqué pour que le 6 apparaisse 2 fois plus souvent que les autres ?

(2 chances sur 7, soit 1/7)

c) Propriétés

On notera Ω l'univers, p la probabilité, A et B deux événements.

I) Pour tout A, $0 \leq p(A) \leq 1$

II) $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

III) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Exemple :

Dans le cas de la trousse avec p corrigée : calculer p ("crayon"), p("pas crayon"), p("rouge") et p("crayon ou rouge").

(7/10 ; 3/10 ; 5/10 ; 8/10)

3) Équiprobabilité

a) Définition

Dans un univers Ω, on dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité (on dit qu'ils sont **équiprobables**).

Exemple :

Dans le jet d'un dé équilibré, chaque chiffre de 1 à 6 est équiprobable.

Remarque :

Pour une même expérience aléatoire, un univers peut être équiprobable et un autre non, selon la définition que l'on fait de l'univers des résultats.

Par exemple, si on lance deux dés et qu'on regarde l'univers comme l'ensemble des sommes des deux chiffres obtenus, on n'est pas dans un cas d'équiprobabilité, alors que si on considère l'univers des résultats comme l'ensemble des couples (a, b) où a est le chiffre du premier dé et b celui du second, on obtient effectivement un univers équiprobable.

b) propriétés

Si Ω contient n éléments, chaque événement élémentaire de Ω aura une probabilité de 1/n.
En effet, la probabilité de chaque résultat est la même et leur somme doit faire 1.
En conséquence, si A contient a événements élémentaires, p(A) = a/n.

Exemple :

Soit à lancer un dé non truqué, calculer p(A = «j'ai fait plus que 2»)

(A = {3 ; 4 ; 5 ; 6} soit 4 éléments, donc p(A) = 4/6)

B) Variable aléatoire

1) Définition

On appelle variable aléatoire X une fonction qui associe à tout résultat (événement élémentaire) un nombre réel.
Pour une même expérience aléatoire, on peut bien entendu définir plusieurs variables aléatoires différentes : par exemple, sur un jet de deux dés, l'une serait la somme et l'autre le produit des deux chiffres sortis.

Exemple :

Soit le jeu de dés suivant : quand on fait 6 on gagne 100 F, quand on fait 1 on gagne 50 F, et de 2 à 5 on perd 40 F.
Le gain (négatif si c'est une perte) est une variable aléatoire, définie par X({6}) = 100, X({1}) = 50 et X ({2}) = X({3}) = X({4}) = X({5}) = - 40.

2) Vocabulaire, notation

- Soit X une variable aléatoire et soit l'événement élémentaire A : si X(A) = a, on dit que a est la valeur prise par X pour l'événement A.

- On appelle "X = a" l'événement (pas forcément élémentaire) qui contient tous les résultats pour lesquels X prend la valeur a.

Exemple :

Dans le jeu ci-dessus, calculer la probabilité de l'événement A = "X = - 40"

(A = {2 ; 3 ; 4 ; 5}, p(A) = 4/6 = 2/3.)

3) Loi de probabilité d'une variable aléatoire

a) Définition

Soit un univers Ω, muni d'une probabilité p, et soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_1, x_2, …, x_n.

La loi de probabilité de X est la fonction qui à chaque x_i fait correspondre p("X = x_i").
Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on pourra noter p(X = x_i) ou même p(x_i).

b) Exemple

Toujours dans le même jeu de dés, calculer p("X = 100") et p("X = -40").

(p(X=100) = 1/6 ; p(X=-40) = 4/6)

c) Application

Soit l'expérience consistant à lancer deux dés en vue se calculer la somme des deux chiffres obtenus.

Pour pouvoir faire des calculs, on définira Ω comme l'ensemble des couples de chiffres obtenus, et on notera Ω = {11 ; 12 ; 13 ; … ; 16 ; 21 ; 22 ; …. ; 66}, qui est donc un univers équiprobable (preuve par la mise en arbre)

On définit alors S comme la variable aléatoire "somme de deux chiffres obtenus", avec comme valeurs possibles {2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12}.

Le "2" ne pouvant être obtenu qu'avec le couple 11, sa probabilité sera de 1/36 (car il y a 36 éléments dans Ω , vu qu'il y a 6*6 = 36 couples.

Le "3" peut être obtenu avec 12 et 21, donc p(S=3) = 2/36.

Faire le tableau de la loi de probabilité de S.

S	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p(S)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

4) Espérance mathématique d'une variable aléatoire

a) Signification

L'espérance mathématique est l'équivalent en probabilités de la moyenne pondérée par les fréquences en statistiques.

En langage courant, c'est la valeur moyenne que prendrait cette variable aléatoire sur un très grand nombre d'expériences aléatoires identiques et indépendantes.

b) Définition

L'espérance mathématique E(X) d'une variable a. X prenant les valeurs x_1, x_2, …. x_n ? est le nombre noté E(X) tel que :

$$\boxed{\mathbf{E(X) = x_1\, p(X=x_1) + x_2\, p(X=x_2) + \ldots + x_n\, p(X=x_n)}}$$

c) Exemple

Toujours le même jeu :
E(X) = 100 p(X=100) + 50 p(X=50) – 40 p(X=-40)
E(X) = 100/6 + 50/6 - 40*4/6 = (100 + 50 -160)/6.
E(X) = - 10/6 (on est donc perdant si on joue assez longtemps !).

On appelle "équitable" un jeu dont l'espérance de gain est égale à zéro.

5) Variance et écart type

a) Signification

Ceci représente la "dispersion" des valeurs que peut prendre la variable aléatoire autour de son espérance.

b) Définitions (mêmes notations que ci-dessus)

Variance : $\boxed{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = x_1^2\, p(X = x_1) + x_2^2\, p(X = x_2) + \dots + x_n^2\, p(X = x_n) - (E(X))^2}$

Écart-type : $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$.

Note : **o**n démontre aussi que $\boxed{V(X) = E((X - E(X))^2)}$.

c) Exemple

Calculer V(X) et σ(X) pour le jeu vu plus haut.

$E(X^2) = 100^2\, p(X=100) + 50^2\, p(X=50) + (-40)^2\, p(X=-40)$

$E(X^2) = (10\,000 + 2\,500 + 160 * 4) / 6 = 18\,900 / 6 = 3\,150$

$V(X) = 3\,150 - (-10 / 6)^2 = 3\,150 - 25 / 9 \approx 3\,147$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx \sqrt{3147} \approx 56{,}1$.

C) Expériences identiques et indépendantes

1) Répétition d'expériences identiques et indépendantes

Prenons une expérience aléatoire au protocole bien défini (par exemple, le jet d'un dé).

Imaginons que l'on répète cette expérience n fois, sans qu'aucune expérience modifie la prévisibilité des résultats des suivantes.

Cette série d'expérience est alors une répétition d'expériences identiques et indépendantes.

Exemples :

Une série de tirages de boules dans un sac sans remise n'entre pas dans cette définition, puisqu'à chaque fois, l'expérience se déroule avec un contenu différent du sac.

Une série de lancer d'une même pièce de monnaie correspond bien à la définition.

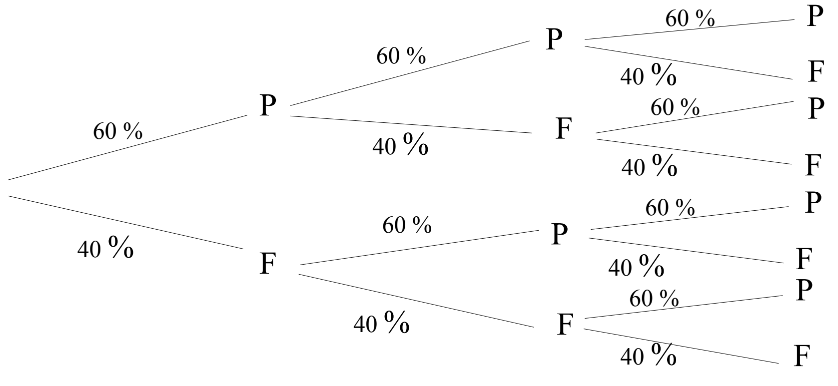
2) Calculs de probabilité avec un arbre pondéré

Dans le cas d'une répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.

On peut représenter cette série d'expériences à l'aide d'un arbre où chaque branche est complétée par la probabilité qu'elle a d'être empruntée.

Exemple :

3 lancers d'un pièce de monnaie truquée où le pile a 60 % de chances de se produire et le face 40 % :



On peut lire sur ce schéma que la probabilité d'obtenir le résultat PPF, par exemple, est de

60%*60%*40% = 14,4%.

Exercices :

a) Calculer la probabilité de chaque séquence et vérifier que leur somme fait bien 100%.

b) Étudier de la même façon trois lancers d'un dé cubique avec trois faces marquées 1, deux faces marquées 2 et une face marquée 3.

D) Loi et schéma de Bernoulli

1) Épreuves et loi de Bernoulli

On appelle épreuve (ou expérience) de Bernoulli une expérience aléatoire admettant seulement deux issues dont l'une a pour probabilité p.

On peut noter ces issues S (succès) et E (échec). Si S a pour probabilité p, alors E aura forcément pour probabilité 1 – p.

Exemples :

a) Lancer d'une pièce de monnaie non truquée (p = 1 – p = 0,5)

b) Lancer d'un dé, le résultat étant divisible par 3 donne S et E sinon.

On aura alors p = 2/6 = 1/3 et 1 – p = 2/3.

2) Loi de Bernoulli, espérance et variance

La loi de Bernoulli est la loi de probabilité de la variable aléatoire X telle que X = 1 si S et X = 0 si E.

On obtient alors pour la loi de Bernoulli l'espérance et la variance suivantes :

$$E(X)=p\times 1+(1-p)\times 0=p \quad .$$

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=p\times 1^2+(1-p)\times 0^2-p^2=p-p^2=p(1-p) \quad .$$

Soit au final :

$$\boxed{\mathbf{E(X) = p} \text{ et } \mathbf{V(X) = p(1-p)}}$$

3) Schéma de Bernoulli

On appelle schéma de Bernoulli une répétition n fois d'épreuves de Bernoulli indépendantes entre elles.

Exemples :

Le premier exemple vu en C2) est un schéma de Bernoulli.

L'exemple D1b), s'il est répété n fois, sera aussi un exemple de schéma de Bernoulli.

E) Loi binomiale

1) Définition

La loi binomiale est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y = nombre de succès dans un schéma de Bernoulli comprenant n épreuves de Bernoulli de probabilité p.

Elle ne dépend donc que des paramètres n et p.

Y correspond à la somme des n variables X du schéma.

Y est donc un nombre entier, qui peut varier de 0 à n.

2) Coefficients binomiaux

Pour calculer la probabilité d'un résultat pour Y, il faut d'abord connaître le nombre d'issues combinées finales donnant la valeur k à Y, c'est à dire le nombre de chemins menant à la valeur k.

Ce nombre dépend uniquement de n et k,et on l'appelle coefficient binomial que l'on note $\binom{n}{k}$ (ancienne notation : C_n^k) .

La probabilité qu'Y prenne la valeur k, soit p(Y = k) est alors égal à $p(Y=k)=\binom{n}{k}p^K(1-p)^{n-k}$.

On démontre que l'espérance et la variance de Y sont :

$$\boxed{E(Y)=n\,p \qquad et \qquad V(X)=n\,p(1-p)}$$

Cas particuliers :

$$\binom{n}{0}=1 \qquad\qquad \binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$$

En effet, un seul chemin mène à tous les succès, et pour avoir un seul succès (ou un seul échec), il faut que ce succès (ou échec) se rencontre dans une seule des branches du chemin, qui en comporte n.

Remarque :

Les calculatrices ayant des fonctions statistiques ont une fonction qui permet de calculer les coefficients binomiaux.

F) Propriétés de la loi binomiale

1) Symétrie des coefficients binomiaux

Pour toutes valeurs de n et k avec k compris entre 0 et n, on a :

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

En effet, les résultats S et E jouant un rôle symétrique, on aura autant de chemins pour aboutir à k fois le résultat S qu'à aboutir à k fois le résultat E, qui correspond à n – k le résultat S.

2) Triangle et relation de Pascal

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	+ 3	3	1		
4	1	= 4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Pour tous entiers naturels n et k tels que k < n, on a : $\boxed{\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}}$.

D'où le triangle de Pascal (connu en Chine depuis longtemps, mais popularisé chez nous par Pascal).

3) Comptage et formule générale des coefficients binomiaux

a) Factorielles

On appelle factorielle de n et on note n! la valeur de l'expression n (n – 1) (n – 2) … (2) (1), c'est à dire le produit des n entiers naturels compris entre 1 et n.

Il est facile de voir que ce nombre représente le nombre de permutations possibles d'un ensemble ordonné comprenant n objets, qu'on note P_n.

En effet, le premier peut être choisi parmi n possibilités, le second dans les n – 1 restants, etc..., et le produit de ces possibilités exclusives l'une de l'autre donne bien n!.

On a donc $\boxed{P_n = n!}$.

b) Arrangements

On appelle arrangement de k objets choisis parmi n le nombre de possibilités pour ranger ces k objets pris dans un ensemble de n objets.

On note ce nombre A_n^k .

On peut avec le même raisonnement que ci-dessus voir que ce nombre est égal à $A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$.

Par conséquent, $\boxed{A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}}$.

c) Formule générale des coefficients binomiaux

Si l'on veut calculer le nombre de combinaisons (non ordonnées) de k objets pris parmi n, il suffit alors de diviser le nombre d'arrangements de ces objets par le nombre de permutations de k objets.

On a alors :

$$\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{P_n} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

On peut aussi écrire :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}}$$

d) Applications

. Calculer les coefficients suivants par la méthode du triangle de Pascal ou par la formule ci-dessus :

- $\binom{6}{2}$
- $\binom{11}{8}$
- $\binom{9}{3}$

. Retrouver les propriétés des coefficients binomiaux à l'aide de la formule générale.

Probabilités – Fiche de révision

Propriétés des lois de probabilité

$p(\Omega) = 1$ $p(\varnothing) = 0$

$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Si Ω est un univers équiprobable de *n* éléments

et si A est un événement comportant *a* éléments :

$$p(A)=\frac{a}{n}$$

Espérance mathématique d'une variable aléatoire X

L'espérance mathématique est l'équivalent en probabilités de la moyenne pondérée par les fréquences en statistiques. C'est la valeur moyenne que prendrait cette variable aléatoire sur un très grand nombre d'expériences aléatoires identiques et indépendantes.

$$\boxed{E(X) = x_1\, p(X=x_1) + x_2\, p(X=x_2) + \dots + x_n\, p(X=x_n)}$$

Variance et écart-type d'une variable aléatoire X

Ils représentent la "dispersion" des valeurs que peut prendre la variable aléatoire autour de son espérance. L'avantage de l'écart-type est d'être exprimé dans la même unité que la variable.

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = x_1^2\, p(X = x_1) + x_2^2\, p(X = x_2) + \dots + x_n^2\, p(X = x_n) - (E(X))^2}$$

$$\boxed{\sigma(X)=\sqrt{V(X)}}$$

On a aussi : $\boxed{V(X) = E((X - E(X))^2)}$

Loi de Bernoulli

$$\boxed{E(X) = p \text{ et } V(X) = p(1 - p)}$$

Loi binomiale

$$\boxed{p(Y=k)=\binom{n}{k}p^K(1-p)^{n-k}}$$

$$\boxed{E(Y)=n\,p \qquad et \qquad V(X)=n\,p(1-p)}$$

Coefficients binomiaux :

$$\boxed{\binom{n}{0}=1} \qquad \boxed{\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n} \qquad \boxed{\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}} \qquad \boxed{\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}} \qquad \boxed{\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}}$$