Chapitre 2 – Vecteurs et Droites

A) Colinéarité de vecteurs

1) Définition

Deux vecteurs u et v sont colinéaires s'ils ont la même direction.
Si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$, cela veut dire que (AB) // (CD).

Théorème :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires équivaut à "il existe un réel k non nul tel que $\vec{u}=k\vec{v}$ "
On peut aussi écrire, en abrégé :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires <=> $\exists k \in \mathbb{R}^* \mid \vec{u}=k\vec{v}$

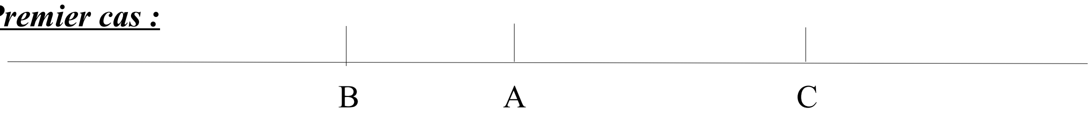
($\exists$ signifie "il existe", $\in$ veut dire "appartient à", R^* signifie l'ensemble des réels sauf 0, et | veut dire "tel que")

Démonstration :

- Sens réciproque <= :
Si $\vec{u}=k\vec{v}$, par définition du produit par un réel, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ auront la même direction, donc seront colinéaires.

- Sens direct => :
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, soit A un point :
On trace le vecteur $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, donc (AB) // (AC) or ces droites ont A en commun donc (AB) = (AC) et A, B et C sont colinéaires sur la droite (AB).

Premier cas :



A est entre B et C. Soit $k=\dfrac{AB}{AC}$

On aura $\overrightarrow{AB}=(-k)\overrightarrow{AC}$, en effet :

- $AB=\dfrac{AB}{AC}\times AC$
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de sens opposés
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont même direction (AB).
- (-k) est donc la solution.

Deuxième cas :

On aura $\overrightarrow{AB}=k\,\overrightarrow{AC}$, car

- $AB=\dfrac{AB}{AC}\times AC$
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont même sens et même direction : k est donc la solution.

2) Parallélisme et colinéarité

Théorèmes

a) **(AB) // (CD) <=> Il existe k réel non nul tel que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$**
b) **A, B et C alignés <=> Il existe k réel non nul tel que $\overrightarrow{AB}=k\,\overrightarrow{AC}$**

Démonstration

a) (AB) // (CD) <=> $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires <=> $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$
b) A, B et C alignés <=> $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires <=> $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

3) Colinéarité et coordonnées

a) Théorème :

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont colinéaires si et seulement si $xy'-x'y=0$.

Démonstration

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k # 0 tel que $\vec{u}=k\vec{v}$, ce qui équivaut à "x = k x' et y = k y'".

- Sens direct :
Si x' = 0, on aura x = 0, d'où xy' – x'y = 0.

Sinon, on aura $k=\frac{x}{x'}$ d'où $y=\frac{x}{x'}y'$ donc yx' = xy' et xy' – x'y = 0.

- Sens réciproque :
Si x' = 0, on aura xy' = 0. Or $\vec{v}$ étant non nul, y' ne peut être égal à zéro aussi. Donc on aura x = 0. Les deux vecteurs sont alors parallèles à l'axe des ordonnées, donc colinéaires.

Sinon, on aura $x'y=xy'$ d'où $y=\frac{x}{x'}y'$ et comme on a bien évidemment $x=\frac{x}{x'}x'$, on a bien $\vec{u}=k\vec{v}$ en posant $k=\frac{x}{x'}$, d'où la colinéarité !

Remarque

Si aucune coordonnée n'est nulle, cela équivaut à dire qu'elles doivent être proportionnelles, soit $\boldsymbol{\frac{y'}{y}=\frac{x'}{x}}$.

b) Exemple :

Parmi les vecteurs suivants, trouver ceux qui sont colinéaires :
$\vec{u}_1(3\,;5)$ $\vec{u}_2(6\,;9)$ $\vec{u}_3(1\,;3)$ $\vec{u}_4(1{,}5\,;2{,}5)$ $\vec{u}_5(-5\,;-15)$ $\vec{u}_6(-6\,;-10)$

4) Vecteur directeur d'une droite

a) Définition

On dit qu'un vecteur $\vec{u}$ non nul est un vecteur directeur de la droite (d) s'il existe deux points A et B de (d) tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$.

b) Propriétés

Soit A un point de (d) et $\vec{u}$ un vecteur directeur de (d).

- Alors, la droite (d) est l'ensemble de tous les points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

- Dire que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d) revient à dire que $\vec{u}$ a pour direction (d).

B) Équations cartésiennes d'une droite

1) Définition

On appelle <u>équation cartésienne</u> d'une droite (d) toute équation du type ax + by + c = 0 qui caractérise les points de cette droite (dans l'équation, x et y représentent les coordonnées d'un point quelconque de la droite, a b et c sont des constantes).

On peut bien sûr multiplier a, b et c par un même nombre sans changer les solutions, ce qui implique qu'il y a plusieurs équations possibles pour une même droite.

2) Justification

En effet soit $\vec{u}(m\,;n)$ un vecteur directeur de cette droite, et $A(x_0\,;y_0)$ un point de cette droite.

Les points de (d) sont les points $M(x\,;y)$ pour lesquels $\overrightarrow{AM}$ et $k\vec{u}$ sont colinéaires, c'est à dire pour lesquels (voir A3) :

$m(y-y_0)-n(x-x_0)=0$ <=> $m\,y-n\,x-m\,y_0+n\,x_0=0$

On voit ici que a = - n et b = m.

3) Propriétés

- Si une droite (d) a pour équation cartésienne ax + by + c = 0, elle admet pour vecteur directeur vecteur $\vec{u}(-b\,;a)$.

Ceci découle directement de la remarque précédente.

- Si b # 0, on peut écrire cette équation sous la forme $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

Ceci nous ramène à la fonction affine vue au collège, avec le coefficient directeur $-\frac{a}{b}$ et l'ordonnée à l'origine $-\frac{c}{b}$.

- Un vecteur directeur peut s'écrire alors aussi $\vec{v}(1\,;-\frac{a}{b})$, qui est bien colinéaire à $\vec{u}(-b\,;a)$.

4) Droites parallèles et équation cartésienne

Deux droites d'équations a x + b y + c = 0 et a' x + b' y + c' = 0 sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires, c'est à dire lorsque : a b' - a' b = 0.

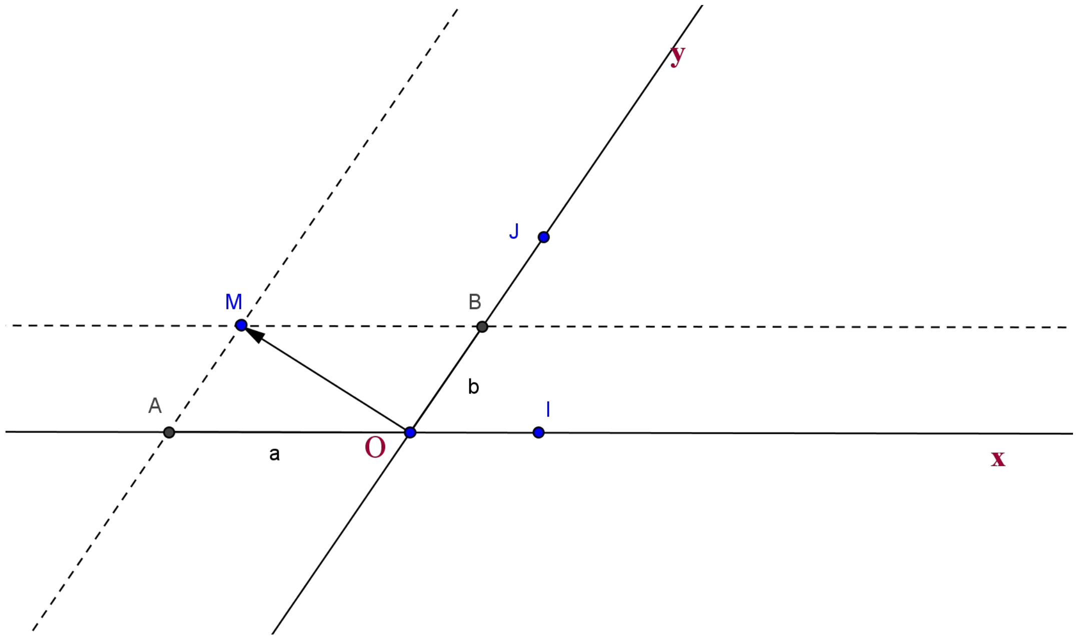
C) Décomposition d'un vecteur

1) Définition

Soient deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non colinéaires. On appelle décomposition du vecteur $\vec{u}$ selon $\vec{v}$ et $\vec{w}$ le couple de nombres (a, b) tel que $\vec{u}=a\,\vec{v}+b\,\vec{w}$.

2)Existence et unicité de la décomposition

Traçons le repère (O, I, J) tel que $\overrightarrow{OI}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{OJ}=\vec{w}$.
En reportant le vecteur $\vec{u}$ à partir de O, on trouve un point M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.



Les coordonnées de M sont alors les a et b cherchés : il suffit de tracer les parallèles passant par M à (OI) et à (OJ) pour les trouver, et elles sont uniques, comme toutes coordonnées de point.

3) Exemple

Soit un triangle ABC, I le milieu de [BC] et G le centre de gravité de ABC.

a) Prouver que $\vec{AI}=\dfrac{\vec{AB}+\vec{AC}}{2}$.

b) Sachant que G est aux deux tiers de la diagonale, prouver que $\vec{AG}=\dfrac{\vec{AB}+\vec{AC}}{3}$.

c) Prouver que $\vec{GI}=\dfrac{\vec{GB}+\vec{GC}}{2}$.

d) Prouver que $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$.

4) Exercice : caractérisation des vecteurs orthogonaux

Soit deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ de directions perpendiculaires (on dit alors que ces vecteurs sont orthogonaux), de coordonnées respectives (x ; y) et (x' ; y').

a) Exprimer le vecteur $\vec{BC}$ en fonction de $\vec{AB}$ et de $\vec{AC}$.

b) Calculer les coordonnées de $\vec{BC}$.

c) Calculer les carrés des longueurs AB, AC et BC.

d) Écrire la relation de Pythagore dans le triangle ABC.

e) En déduire la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux vecteurs soient orthogonaux.