Chapitre 3 – Compléments sur les fonctions

A) Fonction valeur absolue f(x) = |x|

1) Définition

La valeur absolue d'un nombre réel est obtenue en retirant le signe – s'il est négatif.

Autrement dit, $|x| = x$ si $x > 0$, et $|x| = -x$ si $x < 0$. $|x|$ est donc toujours positif (ou nul).

Exemples :

$|17{,}256| = 17{,}256$ $\quad$ $|-6| = 6$ $\quad$ $|-2{,}17| = 2{,}17$

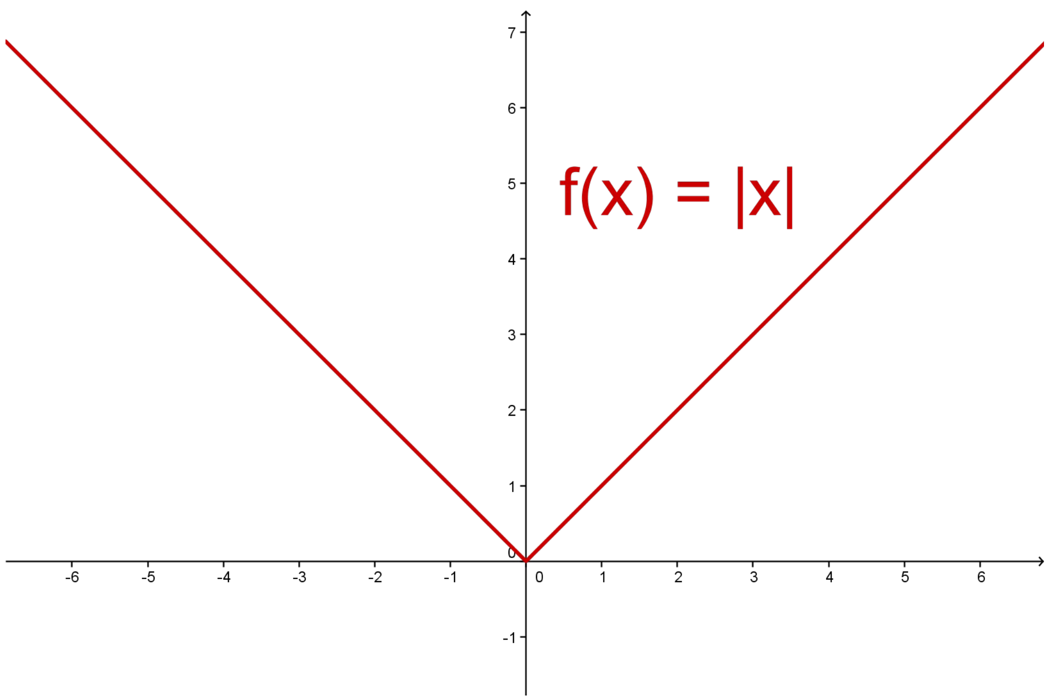
2) Sens de variation

Comme $f(x) = -x$ si x négatif et $f(x) = x$ si x positif, la fonction sera décroissante quand $x < 0$ et croissante quand $x > 0$.

En effet, $y = -x$ est une droite décroissante (coefficient directeur négatif) alors que $y = x$ est croissante (coefficient directeur positif).

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

3) Courbe



B) Fonction racine carrée

1) Définition

La racine carrée d'un nombre réel x est le nombre réel $y = \sqrt{x}$ tel que $y^2 = x$ et $y > 0$.

Un carré étant toujours positif, la fonction racine carrée n'est définie que pour les réels positifs.

Exemples :

$\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ $\sqrt{16} = 4$ $\sqrt{-16}$ n'existe pas

2) Sens de variation

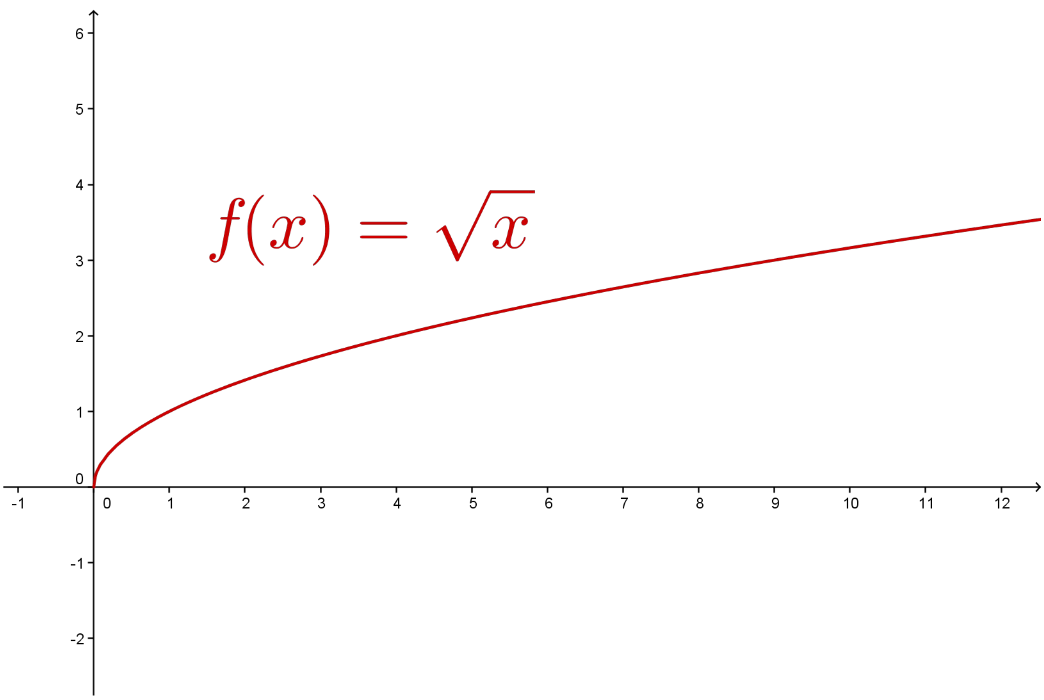
Cette fonction est définie sur $[0 ; +\infty[$ et elle est croissante sur tout l'intervalle.

En effet, si on repart de la définition de la variation, soit $a < b$:

$$v = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a} = \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{(b-a)(\sqrt{b}+\sqrt{a})} = \frac{b-a}{(b-a)(\sqrt{b}+\sqrt{a})}, \text{ or } b-a>0 \text{ et } \sqrt{b}+\sqrt{a}>0, donc\, v>0.$$

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

3) Courbe



4) Particularité

Si x est entre 0 et 1, on aura $\sqrt{x} > x$, sinon on aura $\sqrt{x} < x$.
C'est l'inverse de la fonction carré, pour laquelle $x^2 < x$ entre 0 et 1 et $x^2 > x$ si $x > 1$.

C) Sens de variation des fonctions

1) Opérations sur les fonctions

Soit deux fonctions f et g définies respectivement sur D_f et D_g. On peut alors définir les opérations suivantes :

Opération	**Notation**	**Définition**	**Domaine**
Somme	f + g	h(x) = f(x) + g(x)	$D_f \cap D_g$
Différence	f - g	h(x) = f(x) - g(x)	$D_f \cap D_g$
Produit	f g	h(x) = f(x) × g(x)	$D_f \cap D_g$
Quotient	f / g	h(x) = f(x) / g(x)	$D_f \cap D_g$ et $g(x) \neq 0$

2) Composition de fonctions

On note u ∘ v et on prononce "u rond v" la fonction qui à tout x fait correspondre $u \circ v(x) = u(v(x))$.

Cette fonction est définie sur la partie de D_g dont l'image est incluse dans D_f.

Attention, on a rarement $u \circ v = v \circ u$!

Exemples :

a) $u(x) = \sqrt{x+1}$ et $v(x) = x^2$ $\qquad u \circ v(x) = \sqrt{x^2+1}\ sur\ \mathbb{R}$ et $v \circ u(x) = x+1\ sur\ [-1\,;+\infty[$

b) $u(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = x^2+1$ $\qquad u \circ v(x) = \dfrac{1}{x^2+1}\ sur\ \mathbb{R}$ et $v \circ u(x) = \dfrac{1}{x^2}+1\ sur\ \mathbb{R}^*$

c) $u(x) = x^2 - 2x\ et\ v(x) = \cos(x)$ $\qquad u \circ v(x) = \cos^2(x) - 2\cos(x)$ et $v \circ u(x) = \cos(x^2 - 2x)\ sur\ \mathbb{R}$

3) Variation de la somme de deux fonctions (h = f + g)

Si f et g sont strictement croissantes sur un intervalle I, f + g l'est aussi.

Si f et g sont strictement décroissantes sur un intervalle I, f + g l'est aussi.

Si l'une est croissante et l'autre décroissante sur u intervalle, cette règle ne donne rien.

→ Démonstration puis exemples : $f(x) = 2x - \dfrac{1}{x}$ et f(x) = x² – 3x.

2) Variation du produit d'une fonction par une constante (h = k f)

Si k > 0, h varie dans le même sens que f.

Si k < 0, h varie en sens contraire.

→ Démonstration et exemples : k = 5 puis -3, f(x) = x² – 2 x + 1.

3) Variation d'une fonction composée (f = u o v)

Si u et v varient dans le même sens sur I, f = u o v sera strictement croissante sur I.

Si u et v varient en sens opposé sur I, f = u o v sera strictement décroissante sur I.

→ Démonstration puis exemples (u(x) = x² et v(x) = 2x – 1, puis u(x) = |x| et v(x) = 1/x).

4) Variation de la racine carrée d'une fonction ($h = \sqrt{f}$)

Sur tout intervalle où f est définie et positive, h varie dans le même sens que f.

→ Démonstration et exemple : $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$.

5) Variation de l'inverse d'une fonction (h = 1 / f)

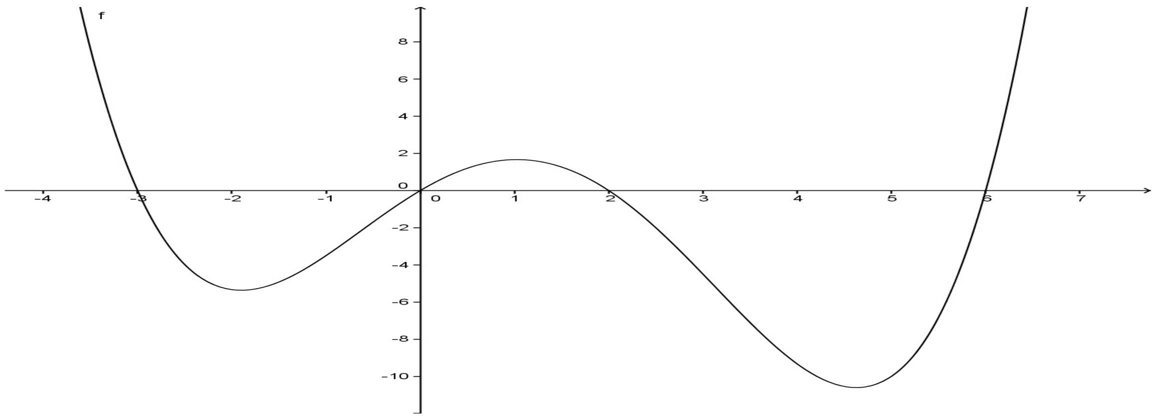
Sur tout intervalle où f ne change pas de signe, h varie dans le sens contraire de f.

→ Démonstration et exemple : $f(x) = 1 / x^2$ et $f(x) = 5 / (x - 3)$.

C) Fonctions, courbes représentatives et symétries

1) D'une courbe à l'autre

Soit une fonction f et sa représentation graphique :



A partir de cette courbe, trouver la courbe des fonctions suivantes :

a) g(x) = - f(x) (→ Symétrie axiale / Ox)

b) h(x) = f(-x) (→ Symétrie axiale / Oy)

c) l(x) = - f(-x) (→ Symétrie centrale / O)

d) m(x) = |f(x)| (→ on "redresse" ce qui est négatif)

2) Fonctions paires et impaires

Paire f(-x) = f(x) → Courbe symétrique / Oy

Impaire f(-x) = - f(x) → Courbe symétrique / O

Exemples : x^2, x^3, sin(x), cos(x)...

3) Symétrie par rapport une droite verticale x = a

$\forall x, f(a+x) = f(a-x)$ ou encore $\forall x, f(x+2a) = f(-x)$

Remarque : pour (Oy), d'équation x= 0, on retrouve bien f(x) = f(-x).

Exemples (trouver a !) :

$f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, $f(x) = 1 / (x - 3)^2$.

4) Symétrie par rapport la droite y = x

$$\forall x, y = f(x) \Longleftrightarrow x = f(y)$$

Exemple :

Fonction inverse f(x) = 1/x.

5) Symétrie par rapport à un point A(a ; b)

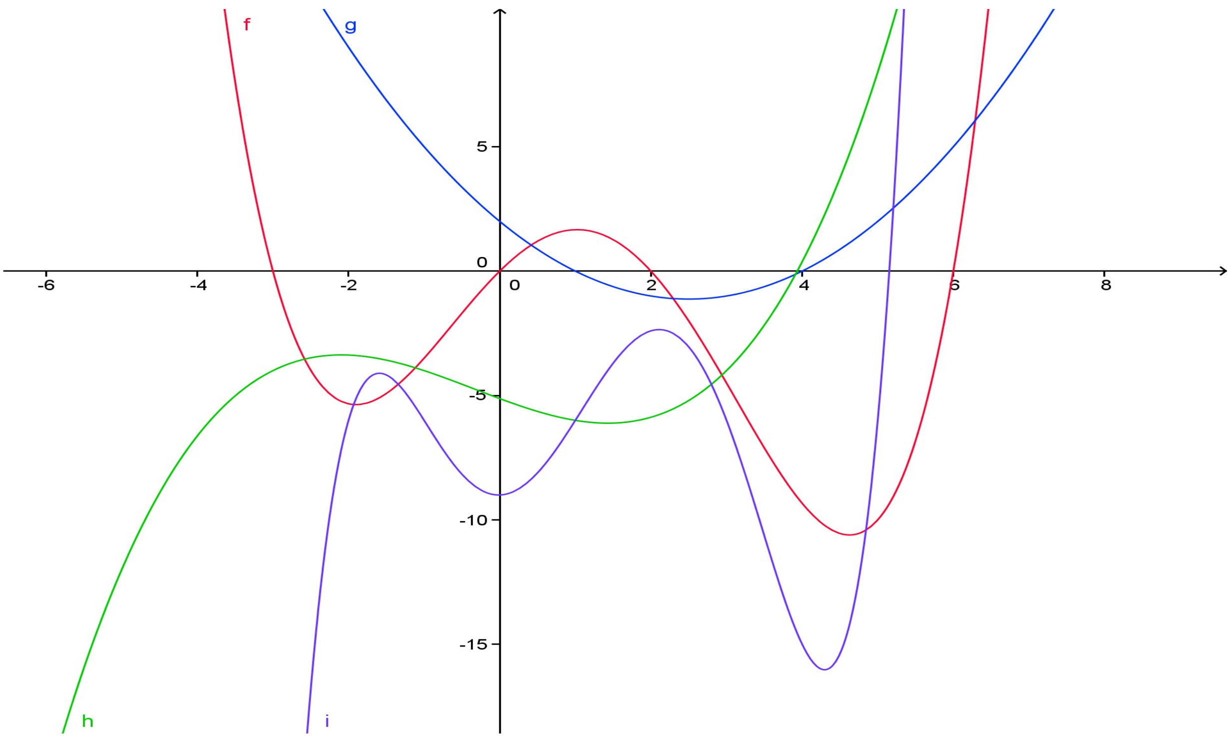
$$\forall x, f(a+x) + f(a-x) = 2b \quad \text{ou} \quad \forall x, f(x+2a) = 2b - f(-x)$$

Exemples (trouver a et b !) :

$f(x) = (2x + 1) / x$

$f(x) = (x - 1) / (2x + 3)$. *(quasiment impossible si on n'a pas fait le 7)*

6) Fonctions Polynômes



$f(x)=x(x - 2)(x + 3)(x - 6) / 12$ → 4ème degré

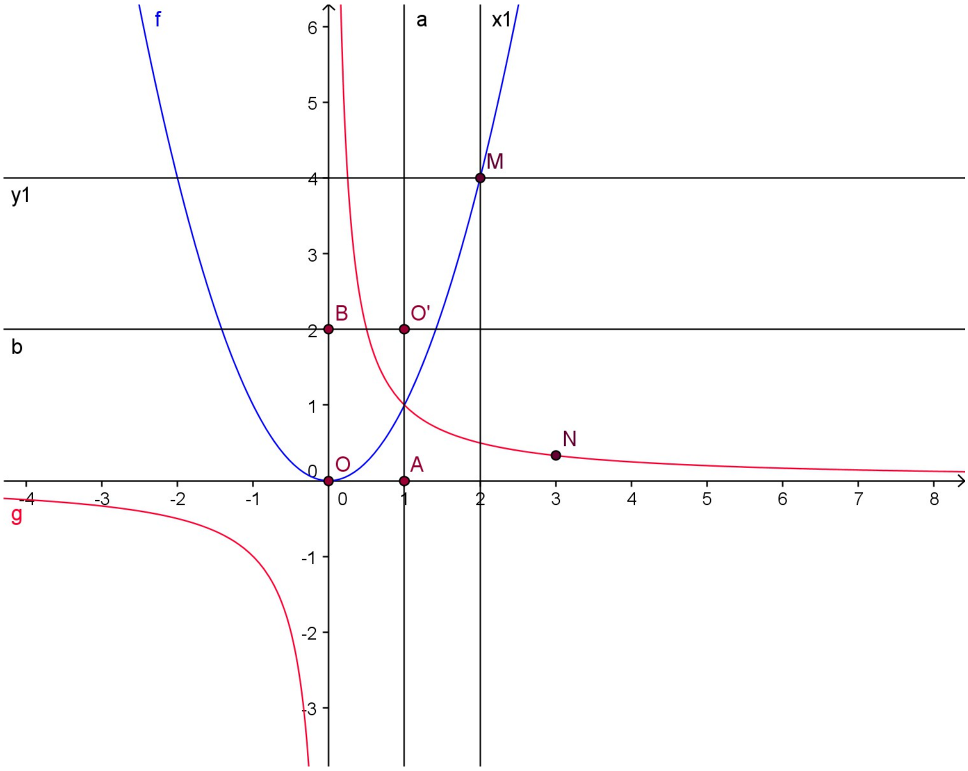
$g(x)=(x - 1)(x / 2 - 2)$ → 2ème degré (parabole)

$h(x)=(x + 1)(x - 3)(x + 3) / 8 - 4$ → 3ème degré

$i(x) =(x + 1)(x + 2)(x - 1)(x - 3)(x - 5) / 10 - 6$ → 5ème degré

7) Changement de repère

Un changement de repère permet d'assimiler des familles de fonctions, comme les fonctions polynômes du second degré à la fonction carré, et les fonctions holographiques (du type $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$) à la fonction inverse.



(commencer par un exemple chiffré (a = 1 et b = 2 comme sur la figure)

Ici, on a représenté la fonction carré et la fonction inverse, et en changeant l'origine du repère, on va trouver l'équation de ces courbes dans un nouveau repère d'origine O' :

Repère xOy : $f(x)=x^2 \quad et \quad g(x)=\frac{1}{x}$

Changement de repère : $X=x+a \quad et \quad Y=y+b$

Repère XO'Y : $f(X)=(X-a)^2+b \quad et \quad g(X)=\frac{1}{X-a}+b$

soit $f(X)=X^2-2\mathrm{a}\mathrm{X}+a^2+b \quad et \quad g(X)=\frac{bX-ab+1}{X-a}$

On reconnaît donc ici une fonction polynôme du second degré et une fonction holographique.

On voit au passage que pour l'hyperbole (fonction holographique), a est la valeur qui annule le dénominateur et que b est le quotient des deux coefficients de x (numérateur sur dénominateur), et le point O'(a ; b) est le point de symétrie (centre) de l'hyperbole.

Exemple :

Que valent a et b pour f(x) = (x – 1) / (2 x + 3) ?

Remarque :

On peut généraliser ces familles en partant de f(x) = a x² (paraboles) et g(x) = a / x (hyperboles).