Chapitre 5 : Applications du produit scalaire

A) Relations métriques dans un triangle

Soit un triangle quelconque ABC. On appellera α l'angle BAC, β l'angle ABC et γ l'angle ACB.

1) La relation d'Al Kashi

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB\,AC\cos(\alpha)}$$

En effet :

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, donc $BC^2 = AC^2 - 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AB^2$

Or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = bc\cos(\alpha)$. **D'où** $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2\,AB\,AC\cos(\alpha)$

2) Le théorème de la médiane

Soit I le milieu de BC. Alors, $\boxed{AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + \frac{1}{2}BC^2}$

Démonstration :

On a vu que $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

On en déduit que $2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$.

Or I étant l'isobarycentre de A et B, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AI}$.

Donc, $(2\,\overrightarrow{AI})^2 = 4\,AI^2 = AB^2 + AC^2 + 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 + AB^2 + AC^2 - BC^2$,

Soit $4AI^2 = 2(AB^2 + AC^2) - BC^2$

Ce qui nous donne bien $AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$

3) Autres relations dans un triangle

Soit S l'aire du triangle. On aura :

S = ½ AB AC sin(α) = ½ AC BC sin(γ) = ½ AB BC sin(β).

Donc, en divisant tout cela par ½ AC BC AB, on trouve :

$$\boxed{\frac{\sin(\alpha)}{BC} = \frac{\sin(\gamma)}{AB} = \frac{\sin(\beta)}{AC}}$$

B) Droite et produit scalaire

1) Équation d'une droite dans un repère quelconque

On a vu que toute fonction affine représente une droite, mais que certaines droites ont pour équation « x = a ». Pour exprimer l'équation générale d'une droite, on utilisera donc :

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

(ceci représente donc bien tous les cas !)

Un vecteur directeur de cette droite est alors $\boxed{\vec{u}(-b\,;a)}$.

Démonstration :

. Si b non nul, on a $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$,
d'où le vecteur directeur (1 ; -a/b) ou (b ; -a) ou encore (-b ; a)

. Si b=0, **x = -c/a**, et donc la droite est verticale et donc parallèle à un vecteur (a ; 0), càd (a ; b)..

2) Vecteur normal et équation de droite

On appelle vecteur normal à une droite un vecteur dont la direction est orthogonale à cette droite.
Pour une droite d'équation ay + bx + c = 0, on peut trouver comme vecteur orthogonal :

$$\boxed{\vec{v}(a\,;b)}$$

Démonstration :
$\vec{u}.\vec{v} = -ab + ba = 0$**, donc ces deux vecteurs sont orthogonaux.**
Réciproquement, si une droite est orthogonale au vecteur $\vec{v}(a\,;b)$, son équation est de la forme **ax + by + c = 0**, où c est une constante à déterminer.

3) Droites perpendiculaires

Soit deux droites d'équations respectives **ax + by + c = 0** et **a'x + b'y + c' = 0** :
Ces droites sont perpendiculaires si et seulement si on a :

$$\boxed{a\,a' + b\,b' = 0}$$

Cas particulier :
Si les droites ont pour équation **y = ax + b** et **y = a'x + b'**, cela donnera
ax – y + b = 0 et a'x – y + b' = 0, donc :
aa' + 1 = 0, soit :

$$\boxed{aa' = -1 \quad \text{ou encore} \quad a' = -1/a}$$

C) Cercle et produit scalaire

1) Caractérisation du cercle de diamètre [AB]

Théorème :
Le cercle de diamètre [AB] est le lieu des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

Démonstration :
Si ce produit scalaire est égal à zéro, cela implique que l'angle $\widehat{MAB} = 90°$.
Mais si le triangle MAB est rectangle en M, c'est que M est sur le cercle de diamètre [AB].
Réciproquement, si M est sur ce cercle, on a forcément $\widehat{MAB} = 90°$, donc on a $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

2) Équation d'un cercle dans un repère orthonormal

a) Cercle de centre A de rayon r

Dire qu'un point M appartient au cercle de centre A(a ; b) de rayon r, c'est dire que la longueur AM est égale à r. Cela est équivalent, puisque tous ces nombres sont positifs, à $AM^2 = r^2$. Si M a pour coordonnées x et y, on a donc :

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$$

Ceci est donc l'**équation du cercle de centre A(a ; b) de rayon r**.

b) Cercle de diamètre [AB]

On a $\overrightarrow{MA}(x-a\,;y-a')\,et\,\overrightarrow{MB}(x-b\,;y-b')$,donc comme on doit avoir $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$, cela donne :
$(x – a)(x – b) + (y – a')(y – b') = 0$, ou encore
$x^2 + y^2 – (a + b)x – (a' + b')y + a b + a' b' = 0$
Autrement dit, c'est une équation de la forme générale :

$$\boxed{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}$$

3) Exemples

a) Trouver l'équation du cercle de centre A(1 ; 2) de rayon 3

b) Trouver l'équation du cercle de centre B(2 ; 0) passant par A(1 ; 2)

c) Trouver le centre et le rayon des cercles d'équations :

$x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0$

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$

$2x^2 + 2y^2 - 4x - 6y + 7 = 0$

D) Trigonométrie

1) Formules d'addition

Quels que soient les réels a et b,

a) cos(a + b) = cos(a) cos(b) – sin(a) sin(b)

b) cos(a – b) = cos(a) cos(b) + sin(a) sin(b)

c) sin(a + b) = sin(a) cos(b) + cos(a) sin(b)

d) sin(a – b) = sin(a) cos(b) – cos(a) sin(b)

Démonstration :
par le cercle trigonométrique, avec xx' + yy' et OA OB cos(OA,OB)

2) Formules de duplication

En faisant b = a dans les formules ci-dessus, on obtient :

a) $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

b) $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$

Et en utilisant $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$:

c) $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$

d) $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$

d) $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$

e) $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$

3) Exemples

Transformer l'expression :

a) $F(x) = \cos x \sin 2x - \sin x \cos 2x$

b) $G(x) = \sqrt{2}\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

c) $H = \sqrt{2}\ \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ *, sachant que* $\frac{11}{12} = \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$

d) $I = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ *et* $J = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ *en remarquant que* $\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{8}$