Chapitre 2 – Les Suites

A) Généralités

1) Définitions

Une suite (ou suite de nombres) est un ensemble ordonné de nombres réels construit sur une règle précise et non aléatoire.

On note généralement **(u_n)** la suite et **u_n** son terme général.

On peut commencer par u_0 ou par u_1 : attention, certaines formules ne sont pas les mêmes dans les deux cas.
u_n est donc le $n^{ième}$ terme si on commence par u_1, mais le $n+1^{ième}$ si on commence par u_0,

2) Exemples

Trouver le terme suivant et la règle de formation des suites suivantes :

a) 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; …

b) 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; …

c) 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; …

d) 1 ; 11 ; 21 ; 1211 ; 111221 ; 312211 ; …

e) 7 ; 4 ; 1 ; -2 ; -5 ; …

f) 24 ; 36 ; 54 ; 81 ; 121,5 ; …

g) 5 ; -10 ; 20 ; -40 ; 80 …

h) 19 ; 12,5 ; 6 ; -0,5 ; ...

3) Suites particulières

Il y a deux types de suites qui sont très courantes et assez simples pour obéir à des formules intéressantes. Ce sont les suites arithmétiques et les suites géométriques :

. Dans une suite arithmétique, on ajoute toujours la même constante pour trouver le nombre suivant.

. Dans une suite géométrique, on multiplie toujours par la même constante pour trouver le nombre suivant.

Reprendre les exemples du A2) et trouver les suites arithmétiques et les suites géométriques.

B) Les suites arithmétiques

1) Définitions

Une suite est dite arithmétique lorsque chaque terme se calcule à partir du précédent en ajoutant à celui-ci une constante, nommée raison de la suite.

Cette définition correspond à la formule suivante :

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

Une suite arithmétique est entièrement définie par son premier terme u_0 et sa raison r. En effet les connaître permet de construire tous les termes de la suite.

Elle est aussi totalement définie si on connaît deux termes ou un terme quelconque et la raison.

2) Exemples

a) Retrouver dans les exemples du 2) les valeurs du premier terme et de la raison des suites arithmétiques.

b) Trouver le premier terme u_0 et la raison r des suites arithmétiques suivantes :

i) $u_2 = 7$ et $u_3 = 13$

ii) $u_7 = 19$ et $r = -3$

iii) $u_{15} = 215$ et $u_{18} = 245$

iv) $u_9 = 50\,400$ et $u_{13} = 50\,800$

v) $u_3 = 15$ et $u_{18} = 45$

3) Formule du n^ième^ terme

On a $u_1 = u_0 + r$, puis $u_2 = u_1 + r = u_0 + r + r = u_0 + 2r$, puis $u_3 = u_2 + r = u_0 + 2r + r = u_0 + 3r$ etc...

En arrivant au terme u_n, on a donc :

$$\boxed{u_n = u_0 + n\,r}$$

4) Applications

Calculer u_{17} dans les exemples du A2) et dans ceux du B2).

5) Relation entre deux termes

En partant de $u_n = u_0 + n\,r$ et de $u_p = u_0 + p\,r$ et en faisant la soustraction terme à terme de ces deux égalité, on trouve $u_n - u_p = u_0 + n\,r - (u_0 + p\,r) = u_0 - u_0 + n\,r - p\,r = n\,r - p\,r = (n - p)\,r$, soit :

$$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$$

Avec cette relation on peut aussi retrouver la façon de calculer r lorsqu'on connaît u_n et u_p :

$$\boxed{r = \frac{u_n - u_p}{n - p}}$$

6) Exemples d'application

Trouver u_{27} dans les cas suivants :

a) $u_6 = 227$ et $r = -1{,}5$

b) $u_7 = 408$ et $u_{31} = 456$

c) $u_{127} = 50\ 468$ et $r = 3$

d) $u_{207} = 1\ 800$ et $u_{107} = 1\ 700$

7) Somme des premiers termes

a) Somme des n premiers entiers naturels

Supposons que l'on veuille calculer 1 + 2 + 3 + … + 17 + 18 + 19.

On peut faire ce calcul à la main (ou à la calculatrice), mais c'est fastidieux.

Une astuce est d'écrire ceci :

S = 1 + 2 + 3 + … + 17 + 18 + 19

S = 19 + 18 + 17 + … + 3 + 2 + 1

et de faire la somme des deux égalités :

S + S = (1 + 19) + (2 + 18) + (3 + 17) + … + (17 + 3) + (18 + 2) + (19 + 1), soit

2S = 19 * 20, ou encore $S=\frac{19\times 20}{2}$.

Ceci se généralise par la formule de la somme des n premiers entiers :

$$\boxed{\mathbf{S=\frac{n(n+1)}{2}}}$$

b) Cas général

Soit S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n).

Dans le cas d'une suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r, on aura :

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$

$S_n = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \ldots + u_3 + u_2 + u_1$, et en faisant la somme :

$2\ S_n = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + \ldots + (u_{n-1} + u_2) + (u_n + u_1)$, puis en remarquant que tous ces termes sont égaux,

$2\ S_n = n\ (u_1 + u_n)$, soit :

$$\boxed{\mathbf{S_n=n\frac{u_1+u_n}{2}}}$$

Si on part de u_0, on trouvera :

$$\boxed{\mathbf{S_n=n\frac{u_0+u_{n-1}}{2}}}$$

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique est égale à n fois la moyenne du premier et du dernier terme.

On peut généraliser ce résultat à la somme de n termes consécutifs :

$$\boxed{\mathbf{u_p+u_{p+1}+\ldots+u_{p+n-1}=n\frac{u_p+u_{p+n-1}}{2}}}$$

La somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à n fois la moyenne du premier et du dernier terme.

8) Exemples et exercices

Calculer S_{17} dans les exemples A2), B2) et B5).

Exercices : 34 à 40 page 65

C) Les suites géométriques

1) Définitions

Une suite est dite géométrique lorsque chaque terme se calcule à partir du précédent en multipliant celui-ci par une constante, nommée raison de la suite.

Cette définition correspond à la formule suivante :

$$\boxed{u_{n+1} = u_n \times q}$$

Une suite géométrique est entièrement définie par son premier terme u_0 et sa raison q. En effet les connaître permet de construire tous les termes de la suite.

Elle est aussi totalement définie si on connaît deux termes de parité différente (à cause du signe de la raison) ou un terme quelconque et la raison.

2) Exemples

a) Retrouver dans les exemples du 2) les valeurs du premier terme et de la raison des suites géométriques.

b) Trouver le premier terme u_0 et la raison q des suites géométriques suivantes :

- i) $u_2 = 7$ et $u_3 = 14$
- ii) $u_7 = 19$ et $q = -1$
- iii) $u_1 = 15$ et $u_3 = 135$ (!)
- iv) $u_9 = 800$ et $u_{12} = 6\,400$
- v) $u_3 = 125$ et $u_5 = 25$ (!)

3) Formule du n^ième^ terme

On a $u_1 = u_0 \times q$, puis $u_2 = u_1 \times q = u_0 \times q \times q = u_0 \times q^2$, puis $u_3 = u_2 \times q = u_0 \times q^2 \times q = u_0 \times q^3$ etc...

En arrivant au terme u_n, on a donc :

$$\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$$

4) Applications

Calculer u_6 dans les exemples du A2) et dans ceux du C2).

5) Relation entre deux termes

En partant de $u_n = u_0 \times r^n$ et de $u_p = u_0 \times r^p$ et en divisant terme à terme ces deux égalité, on trouve :

$\frac{u_n}{u_p} = \frac{u_0 \times q^n}{u_0 \times q^p} = \frac{q^n}{q^p} = q^{n-p}$, ce qui nous donne la formule :

$$\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$$

Avec cette relation on peut aussi retrouver la façon de calculer r lorsqu'on connaît u_n et u_p :

$$\boxed{q=\sqrt[n-p]{\left(\frac{u_n}{u_p}\right)}}$$

6) Exemples d'application

Trouver u_5 dans les cas suivants :

a) $u_6 = 227$ et $q = -1,5$

b) $u_7 = 405$ et $u_9 = 45$

c) $u_{127} = 50\ 468$ et $q = 3$

d) $u_{20} = 5\ 120$ et $u_{23} = 10\ 240\sqrt{2}$

7) Somme des premiers termes

a) Somme des puissances d'un nombre

Soit à calculer $\mathbf{S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n}$.

L'astuce de calcul ici est d'écrire $\mathbf{x\ S_n = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^{n+1}}$, puis de faire la soustraction :

tous les termes vont s'éliminer sauf le 1 et le x^{n+1} ce qui va donner :

$\mathbf{x\ S_n - S_n = 1 - x^{n+1}}$ soit en mettant S_n en facteur :

$$\boxed{S_n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}}$$

b) Formule de la somme

On refait la même chose pour une suite géométrique, cette fois on a :

$\mathbf{S_n = u_0 + u_0\,q + u_0\,q^2 + u_0\,q^3 + \ldots + u_0\,q^n = u_0\,(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n) = u_0\,(1 - q^{n+1}) / (1 - q)}$

Ce qui nous donne la formule de a somme :

$$\boxed{S_n=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

Remarquons qu'on peut aussi l'écrire :

$$\boxed{S_n=u_0\frac{q^{n+1}-1}{q-1}}$$

On utilisera donc l'une ou l'autre selon que q est inférieur (formule 1) ou supérieur (formule 2) à 1, afin d'avoir autant que possible un numérateur et un dénominateur positifs.

On peut ici aussi généraliser ce résultat à la somme de n termes consécutifs :

$$\boxed{u_p+u_{p+1}+\ldots+u_{p+n-1}=u_p\frac{q^{n+1}-1}{q-1}}$$

8) Exemples et exercices

a) Calculer la somme des 7 premiers termes des suites vues en A2), en C2) et en C6)

b) Intérêts composés ou intérêts simples

Sophie place 500 000 F sur un compte à intérêts composés au taux de 3% par an.

On appellera u_n le solde de son compte à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année.

i) Quel montant aura-t-elle sur son compte au bout d'un an (u_1) ?

ii) Même question au bout de 2 ans, 3 ans et 10 ans.

iii) Quel montant aurait-elle eu au bout de 10 ans si les intérêts n'étaient pas composés ?

Note : on parle d'intérêts composés lorsque les intérêts versés en fin d'année viennent sur le compte et y restent pour porter eux aussi intérêt l'année suivante.

c) Salaire indexé

Hinano se voit proposer au moment de son embauche un salaire mensuel de 180 000 F et le choix entre deux styles d'augmentation : une augmentation de 9 900 F du salaire mensuel tous les ans, ou une augmentation de 5% tous les ans.

i) À quel pourcentage correspond une augmentation de 9 900 F la première année ?

ii) Quelle augmentation aura Hinano à la fin de la première année si elle choisit les 5% ?

iii) Au bout de dix ans, quel sera son salaire dans les deux cas ?

iv) Au bout de dix ans, quel sera la somme de ses salaires perçus dans les deux cas ?

d) Exercices

45 et 48 page 66, 52 et 53 page 67, 57 page 68, 61 page 69, 67 page 70, 72 page 71

Préparation au bac : 80 page 73, 83 page 74, 84 et 85 page 75, 88 page 77, 90 page 79

Les suites – Fiche de révision

Formules à connaître

	Suites arithmétiques	Suites géométriques
Définition par récurrence	$u_n = u_{n-1} + r$	$u_n = u_{n-1} \times q$
Terme général	$u_n = u_0 + n \times r$	$u_n = u_0 \times q^n$
Relation entre deux termes	$u_n = u_p + (n-p) \times r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$
Somme des n premiers termes	$S_n = n \times \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$	$S_n = u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$
Autre formule	$S_n = n \times u_0 + \frac{n(n-1)}{2} \times r$	$S_n = u_0 \times \frac{q^n - 1}{q-1}$

Somme des n premiers nombres	$1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$
Somme des n premières puissances d'un nombre	$1+q+q^2+q^3+...+q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$