Chapitre 3 – Les Dérivées

A) Nombre dérivé et tangente à une courbe en un point (rappels de première)

1) Définitions

Soit un point A sur la courbe d'une fonction f. Si on appelle a son abscisse, son ordonnée sera donc f(a).

La tangente à la courbe C_f d'une fonction f en un point A est la droite passant par A et qui, au voisinage de A, est "parallèle" à la courbe C_f.

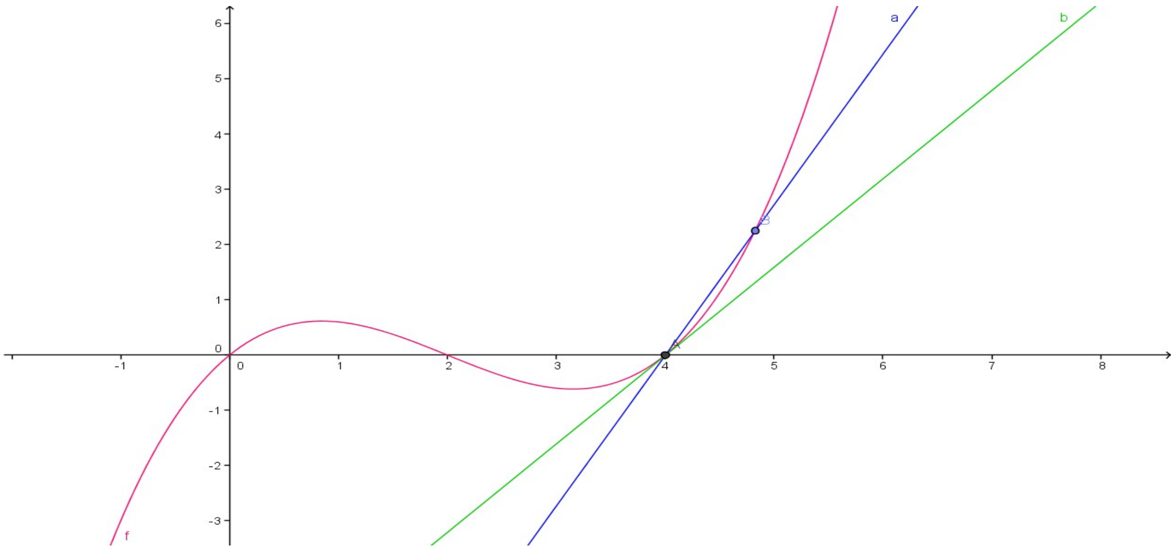
On appellera nombre dérivé de f pour la valeur a le coefficient directeur de la tangente à C_f au point A de coordonnées (a ; f(a)).

Ce nombre dérivé sera noté f'(a).

2) Interprétation graphique

a) La tangente et son approximation

Sur la courbe suivante, on a tracé en vert la tangente à C_f en A(4 ; 0), et on a placé un point M de la courbe de f, peu éloigné de A :



Si on rapproche le point M du point A, la droite (AM) se rapprochera de la tangente en A à la courbe de f.

b) Calcul du nombre dérivé

Si M a pour abscisse le nombre a + h, le coefficient directeur de la droite (AM) sera le taux de variation de la fonction f entre A et M, soit :

$$t_a(h) = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} .$$

Si cette fonction de h $t_a(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite pour h s'approchant de zéro (ce qui est généralement le cas), c'est à dire lorsque M se rapproche de A, cette limite sera le coefficient directeur de la tangente à C_f en A et s'appellera alors le nombre dérivé de f(x) en a.

On dit alors que f(x) est dérivable en a, et comme vu ci-dessus on note f'(a) le nombre dérivé de f(x) en a.

c) Dérivabilité

Il y a plusieurs cas où une fonction n'est pas dérivable en un point A(a ; f(a)) :

1. Si la tangente est verticale en A, elle n'a pas de coefficient directeur (il serait infini), c'est donc un cas où la fonction n'admet pas de nombre dérivé (n'est pas dérivable) en ce point.
2. Si la courbe de la fonction fait un angle en A, il y aurait une tangente à gauche différente de la tangente à gauche, elle n'est donc pas dérivable non plus en ce point
3. Si la fonction est discontinue, donc que la courbe "saute" d'un point à un autre de même abscisse (on ne peut pas tracer cette courbe sans lever le crayon), il y a aussi deux tangentes distinvtes à gauche et à droite, et la fonction n'est donc pas dérivable non plus en ce point.
4. Certaines fonctions bizarres ne sont carrément dérivables nulle part. Par exemple, une fonction égale à 1 pour tout x rationnel, et à 0 sinon.

d) Exemples :

. Soit $f(x) = x^2$. Calculer le nombre dérivé de f(x) en x = 2.

. Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Calculer le nombre dérivé de f en x = 0.

. Soit f(x) = 1 / x. Calculer le nombre dérivé de f(x) en x = 3.

B) La fonction dérivée

1) Définitions

Si pour tout point x d'un intervalle I de R, f est dérivable en x, on dit que f est dérivable sur I.

On peut alors définir une fonction, qu'on appellera fonction dérivée ou "dérivée" de f(x) la fonction qui associe à tout x de I, le nombre dérivé de f en x, soit f'(x). On note f' cette nouvelle fonction.

Exemple résolu :

Soit $f(x) = x^2$:

On aura $\mathbf{t(h)=\frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{(a^2+2ah+h^2)-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = 2a+h}$

D'où en faisant h = 0 maintenant que c'est possible, $\mathbf{t(0)=f'(a)=2a}$.

En remplaçant enfin a par x, on trouve la formule de la dérivée de x^2, soit **f'(x) = 2x**.

On peut aussi écrire : **$(x^2)' = 2x$**.

Exemples :

Quelle est la dérivée de :

- f(x) = 3x + 7 ?
- $f(x) = \frac{1}{x}$?

Indice :

Pour cela, calculer comme ci-dessus d'après la définition le nombre dérivé de f en x=a, faire h= 0 lorsque ce sera possible, et remplacer enfin a par x.

2) Les dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Dérivée
$f(x)=k$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=mx+p$	$f'(x)=m$
$f(x)=ax^2+bx+c$	$f'(x)=2ax+b$
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3x^2$
$f(x)=kx^n$	$f'(x)=nkx^{n-1}$
$f(x)=\frac{k}{x}$	$f'(x)=\frac{-k}{x^2}$
$f(x)=k\sqrt{x}$	$f(x)=\frac{k}{2\sqrt{x}}$

<u>Note :</u> x est la variable, les autres lettres sont des constantes réelles.

<u>Exemples :</u>

Trouver grâce au tableau la dérivée de :

- $f(x) = 7x - 3$
- $f(x) = 2x^2 - 7x + 27$
- $f(x) = x^3$
- $f(x) = 5x^2 -2x - 3$
- $f(x) = \frac{3}{x}$
- $f(x) = 3x^7$
- $f(x) = 6\sqrt{x}$

3) Équation de la tangente en un point A à la courbe C_f de f(x)

On a vu que le coefficient directeur de la droite tangente (T) à la courbe de f(x) au point A(a ; f(a)) est le nombre dérivé de f au point A, c'est à dire aussi la valeur de la fonction dérivée f'(x) lorsque x=a, autrement dit f'(a).

L'équation de (T) est donc de la forme :

y = mx + p avec m=f'(a), donc **y = f'(a)x + p**.

Pour trouver p, on va exprimer le fait que (T) passe par A, autrement dit que les coordonnées de A obéissent à cette égalité, soit : **f(a) = f'(a) a + p** (on a simplement remplacé, dans l'équation de la droite, x et y par les coordonnées de A, soit y = f(a) et x = a).

D'où on peut trouver que **p = f(a) – f'(a) a**, et en remplaçant dans l'équation de (T), on arrive à l'équation **y = f'(a) x + f(a) – a f'(a)**, et en mettant ensuite f'(a) en facteur :

> **L'équation de la tangente à la courbe de f(x) en x = a est :** $\mathbf{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$.

<u>Exemples :</u>

Trouver l'équation de la tangente dans les cas suivants :

- $f(x) = 7x - 3$ pour $a = 684$

- $f(x) = 2x^2 - 7x + 27$ pour $a = 1$
- $f(x) = x^3$ pour $a = 0$ et pour $a = 2$
- $f(x) = 5x^2 - 2x - 3$ pour $a = 2$
- $f(x) = \dfrac{3}{x}$ pour $a = 1$
- $f(x) = 3x^7$ pour $a = 1$
- $f(x) = 6\sqrt{x}$ pour $x = 2$

Remarque :

Une autre façon de trouver l'équation de la tangente (T) est la suivante :
Le taux de variation d'une fonction affine étant constant et la tangente étant la courbe d'une fonction affine, on peut dire que le taux de variation de la tangente, égal à son coefficient directeur, donc à f'(a), est égal au taux de variation entre A(a ; f(a)) et M(x ; y), soit :

$\mathbf{f'(a)=\dfrac{y_M-y_A}{x_M-x_A}=\dfrac{y-f(a)}{x-a}}$, soit $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ ou encore : $\boxed{\mathbf{y = f'(a)(x - a) + f(a)}}$ **.**

.

C'est aussi la raison pour laquelle la tangente à une droite en n'importe quel point de cette droite est cette droite elle-même !

4) Opérations sur les dérivées

On notera u et v deux fonctions, dont les dérivées sont respectivement u' et v'.

Opération	Formule de la dérivée
$u+v$	$u'+v'$
ku	ku'
uv	$u'v+uv'$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Exemples :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}+3x^{19}$

$f(x)=x^3\sqrt{x}$

$f(x)=(x^2+1)^3$

$f(x)=(3x+1)(2x-3)$

$f(x)=\dfrac{3x+1}{2x-3}$

5) Lien avec le tableau de variation

a) Dérivée et croissance

On a vu que le nombre dérivé correspond à la pente de la tangente de la courbe de f en un point. S'il est positif, la tangente, donc la courbe, monte au voisinage de ce point, sinon elles descendent.

On en déduit le théorème suivant :

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Si pour tout x de I, f'(x) > 0, alors f est strictement croissante sur I.

Si pour tout x de I, f'(x) < 0, alors f est strictement décroissante sur I.

b) Conséquences sur le tableau de variation

- L'étude du signe de la dérivée permet donc de déterminer le tableau de variation d'une fonction.
- De même, ce tableau aidera à la construction de la courbe de la fonction.

Remarque :

Pour mieux étudier le signe de la dérivée, il vaudra mieux l'avoir sous forme **factorisée** que sous forme développée (car on pourra ainsi l'étudier grâce à un tableau de signes).

Exemples :

Faire le tableau de variation de la fonction :

- $f(x)=x^2-2x+3$
- $f(x)=3x+\frac{2}{x}$
- $f(x)=3x^2-5x+\frac{1}{x}$

6) Application : signe d'un polynôme du second degré f(x) = a x² + b x + c

a) Résolution de f(x) = 0

b) Calcul et signe de la dérivée

c) Tableau de variation

d) Règle des signes du polynôme du second degré

Fiche de révision : Dérivation

Définition :

$$f'(a)=\frac{df}{dx}(a)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$$

Équation de la tangente en a à la courbe de f :

$$y = f'(a)\ (x - a) + f(a)$$

Dérivées de base :

Fonction définie sur	Fonction f(x) =	Dérivée f'(x) =	Dérivée définie sur
$\mathbb{R}$	k	0	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$a\,x + b$	a	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$a\,x^n$	$n\,a\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\frac{a}{x}$	$\frac{-a}{x^2}$	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\frac{a}{x^n}$	$\frac{-n\,a}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
$[0;+\infty]$	$a\sqrt{x}$	$\frac{a}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty]$
$\mathbb{R}$	$a\sin(x)$	$a\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$a\cos(x)$	$-a\sin(x)$	$\mathbb{R}$

Dérivée d'une fonction composée (formule générale) :

$$\big(u(v(x))\big)' = v'(x)\times u'(v(x))$$

Opérations sur les dérivées — *Dérivées des fonctions composées*

Opération	Formule de la dérivée		Fonction composée	Formule de la dérivée
$u+v$	$u'+v'$		$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
$k\,u$	$k\,u'$		$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
$u\,v$	$u'v+u\,v'$		$u(ax+b)$	$a\,u'(ax+b)$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$		$(a\,x+b)^n$	$a\,n(a\,x+b)^{n-1}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$		$\frac{1}{(a\,x+b)^n}$	$\frac{-a\,n}{(a\,x+b)^{n+1}}$
u^n	$n\,u'\,u^{n-1}$		$\sin(a\,x+b)$	$a\cos(a\,x+b)$
$\frac{1}{u^n}$	$\frac{-nu'}{u^{n+1}}$		$\cos(a\,x+b)$	$-a\sin(a\,x+b)$