CHAPITRE 4 – Exponentielles et Logarithmes

A) Les fonctions exponentielles

1) La notion de puissance

a) Rappels

Pour tout nombre entier n et tout nombre réel a, on appelle a^n la valeur a * a *... * a, où a apparaît n fois. Nous avons beaucoup utilisé cela dans l'étude des suites géométriques, dont le terme général, de rang n, s'écrit $\mathbf{u_n = u_0 \times q^n}$, où u_0 est le premier terme, et q la raison.

Vous connaissez aussi les règles de calcul concernant les puissances, à savoir :

$$\mathbf{a^n \times a^m = a^{n+m} \qquad (a^n)^m = a^{n \times m} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad a^0 = 1}$$

Exemples :

$$\mathbf{(10^3)^2 = 10^{3\times 2} = 10^6}$$

$$\mathbf{10^5 \times 10^2 = 10^{5+2} = 10^7}$$

$$\mathbf{10^{-9} = \frac{1}{10^9}}$$

$$\mathbf{\frac{10^8}{10^5} = 10^{8-5} = 10^3 = 1000}$$

b) Extension de la notion de puissance

On appelle $f(n) = a^n$ une fonction exponentielle de n (exponentiel a la même racine que "exposant").

Cette fonction n'est pour le moment définie que pour n entier, mais on peut l'étendre à des valeurs non entières de la façon suivante :

Prenons par exemple $x = 3^{0,5}$: d'après les règles ci-dessus, on doit avoir $x^2 = (3^{0,5})^2 = 3^{0,5*2} = 3^1 = 3$.

Si l'on suppose x positif, on aura donc $x = \sqrt{3}$! De même, $3^{1,5} = 3^1 \times 3^{0,5} = 3\sqrt{3}$.

Il est donc facile d'étendre cette définition à toutes les fractions de dénominateur 2, en utilisant la racine carrée.

En utilisant les racines cubiques, on rajoute les fractions de dénominateur 3, etc... On peut ainsi définir précisément les puissances rationnelles de a (qui est un réel quelconque).

Par extension, on pourra étendre aussi cette définition à des puissances réelles aussi.

Graphiquement, cela correspondrait à relier les points d'un graphique de suite géométrique, en construisant une belle courbe bien lisse et arrondie, comme me profil de la tour Eiffel, qui justement est conçue sur ce principe...

Remarque :

On ne peut pas appliquer ces principes lorsque a est négatif ! Par exemple, on ne pourrait pas "lisser" la courbe, qui "saute" du positif au négatif et inversement à chaque passage à l'entier suivant...

2) Définition et propriétés des fonctions exponentielles

a) Définition

On appellera fonction exponentielle de base a notée $f(x) = a^x$ l'extension à tous les nombres réels de la fonction $f(n) = a^n$, où a est un réel positif non nul.

Cette fonction est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et est positive pour toute valeur de x (en effet, a est positif et toute multiplication ou division par a restera positive).

b) Propriétés

Comme pour les fonctions entières dont elles sont les extensions, les fonctions exponentielles ont les propriétés suivantes :

$$a^x \times a^y = a^{x+y} \qquad (a^x)^y = a^{x \times y} \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad a^0 = 1$$

De plus, elles sont strictement positives pour toute valeur de x.

Ces fonctions sont croissantes si a est supérieur à 1, et décroissantes si a est plus petit que 1 (le cas où a = 1 est trivial et représente la fonction constante f(x) = 1...).

c) Dérivée et Tableau de variation

On admettra que la dérivée de la fonction $f(x) = a^x$ est $f'(x) = k\ a^x$, où k un nombre réel nommé "ln(a)".

On a bien entendu k négatif lorsque a est entre 0 et 1, et k positif sinon, pour être cohérent avec les cas de décroissance et croissance évoqués ci-dessus.

$a > 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)=a^x$	0	1	a	$+\infty$

$0 < a < 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)=a^x$	$+\infty$	1	a	0

Remarque :

La fonction $f(x) = k\ a^x$ où k est une constante aura les variations suivantes :

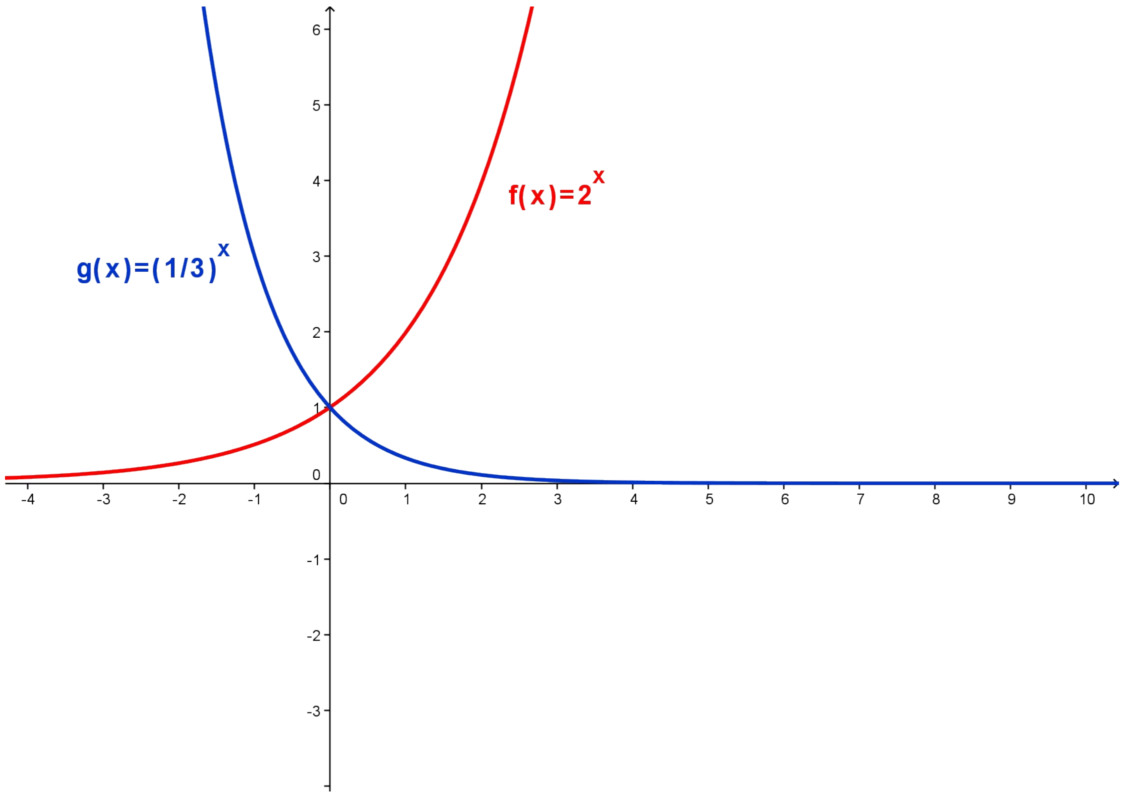
Si $a > 1$ et $k > 0$, elle croît de 0 à $+\infty$.

Si $a > 1$ et $k < 0$, elle décroît de 0 à $-\infty$.

Si $a < 1$ et $k > 0$, elle décroît de $+\infty$ à 0.

Si $a < 1$ et $k < 0$, elle croît $-\infty$ à 0.

d) Représentations graphiques



On remarque que les deux courbes (comme toutes les exponentielles) passent par le point (0 ; 1). En effet, pour tout a, on aura $a^0 = 1$!

B) Les fonctions Logarithmes

1) Définition et propriétés

a) Définition

Les fonctions exponentielles sont 'monotones", c'est à dire qu'elles sont toutes soit croissantes sur $\mathbb{R}$, soit décroissantes sur $\mathbb{R}$, et toujours positives.

Cela veut dire que pour toute ordonnée y, on ne trouve qu'une valeur de x, et encore faut-il que y soit positif et non nul.

On peut donc définir une fonction "réciproque" des fonctions exponentielles $f(x) = a^x$ en les définissant par "$g(x) = y$ tel que $f(y) = x$".

Graphiquement cela équivaut à échanger les axes (Ox) et (Oy), ou à faire une symétrie par rapport à la première diagonale (bissectrice de (Ox) et (Oy) passant par le point (1 ; 1), d'équation "y = x".

La fonction g(x) ainsi définie s'appelle le logarithme de base a de x et s'écrit $g(x) = \log_a(x)$..

Un logarithme très utilisé est le logarithme de base 10, qui s'écrit log(x). Il sert parfois à remplacer des unités par d'autres plus pratiques (exemples : le décibel, logarithme de la puissance sonore).

Remarque :

D'après la définition, si $a = \log(b)$, cela veut dire que $b = 10^a$.

Or le nombre de chiffres nécessaires pour écrire un nombre x (en base 10) est égal à la partie entière de log(x) plus 1.

Exemples :
log(1000) = 3 car $10^3 = 1000$
log(10 000) = 4 de la même façon, et comme log est une fonction croissante, tous les nombres entre 1000 et 9 999 ont un log compris entre 3 pour 1 000) et 4 (non compris, car 4 correspond déjà à 10 000).

b) Propriétés

Chaque propriété de 10^x en amène une pour log(x) :

$\mathbf{10^x \times 10^y = 10^{x+y}}$	entraîne	$\mathbf{\log(xy) = \log(x) + \log(y)}$.
$\mathbf{(10^x)^y = 10^{x \times y}}$	entraîne	$\mathbf{\log(x^y) = y \log(x)}$
$\mathbf{10^{-x} = \frac{1}{10^x}}$	entraîne	$\mathbf{\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)}$
$\mathbf{\frac{10^x}{10^y} = 10^{x-y}}$	entraîne	$\mathbf{\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)}$
$\mathbf{10^0 = 1}$	entraîne	$\mathbf{\log(1) = 0}$
$\mathbf{10^1 = 10}$	entraîne	$\mathbf{\log(10) = 1}$

Ces formules restent valables aussi pour toutes les fonctions logarithmes, même quand elles ne sont pas de base 10.

Exemples :
Calculer les logarithmes suivants :
- log(1 000 000) =
- $\log(10^{21})$ =
- log(0,01) =
- $\log\left(\frac{1}{10\,000}\right) =$

C) Résolution d'équations

1) Principe

Aussi bien dans le cas des exponentielles que dans celui des logarithmes, on a affaire à des fonctions monotones (toujours croissantes ou toujours décroissantes), il y a donc toujours une solution unique aux équations du type $a^x = k$ (avec k positif) ou log(x) = k (le x sera positif).

On peut les résoudre en passant au logarithme dans le premier cas, et à l'exponentielle dans le second :

Si $a^x = k$, alors $\log(a^x) = \log(k)$ d'où x log(a) = log(k) ou encore $x = \frac{\log(k)}{\log(a)}$.

Si $a^x = a^k$ Alors x = k.

Si log(x) = k, alors $x = 10^k$.   Si log(x) = log(k), Alors x = k.

De même, pour résoudre $a^x < k$ ou $\log(x) < k$, il suffit de résoudre l'égalité correspondante, et en déduire l'inégalité sur x ($x < \log(k)/\log(a)$ dans le premier cas, $x < 10^k$ dans le second).

Remarque : Pour $a^x < k$, il faut cependant inverser le signe de l'inégalité pour x si $a < 1$!

2) Applications

a) Équations à résoudre

Trouver x dans les cas suivants :

. $13^x = 13^7$

. $\log(x) = \log(10\ 000)$

. $2^x = 1024$

. $\log(x) = 12,5$

. $2^{x-2} = 2^{3x-7}$

. $\log(2x - 1) = \log(3x + 7)$

b) Petits problèmes

. Soit la suite géométrique de terme général $u_n = 3 * 2^n$

À partir de quelle valeur de n les termes seront-ils supérieurs à 52 201 ?

. Sans calculatrice, trouver le nombre de chiffres de x en sachant que $\log(x) = 5,285$.