CHAPITRE 6 – Les Probabilités

A) Définitions et généralités

1) Définitions de base

a) Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire (du latin "alea", qui signifie dé) est une expérience dont le résultat dépend au moins en partie du **hasard**.

Exemples :

. Je lance un dé et je regarde le chiffre indiqué au-dessus : cela peut être n'importe quel chiffre entre 1 et 6.

. Je tire une boule dans un sac contenant des boules rouges et des boules noires : je peux tomber sur une rouge ou une noire.

. Je lance deux pièces en l'air et je regarde si elles retombent sur pile ou face.

b) Issue

On appelle issue chaque **résultat possible** d'une expérience aléatoire.

Dans les exemples ci-dessus, les issues sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6 pour le lancer de dé, et "rouge" ou "noire" pour le tirage de boule.

Pour le troisième exemple, on peut considérer trois ou quatre issues possibles selon que l'on distingue ou non les deux pièces : PF, PP, FP et FF dans un cas, PP, FF et PF dans l'autre.

c) Univers

On appelle univers de l'expérience aléatoire l'**ensemble de toutes ses issues**, c.à.d de tous ses résultats possibles. On le note en général Ω (oméga, dernière lettre de l'alphabet grec).

Ci-dessus, on a pour le premier $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ et pour le second $\Omega = \{\text{Rouge} ; \text{Noir}\}$.

Deux points de vue possibles pour le troisième exemple : $\{PF ; PP ; FF ; FP\}$ ou $\{PP ; FF ; PF\}$.

Ceci prouve que selon le point de vue adopté, une expérience peut avoir plusieurs univers différents.

L'univers peut être fini comme dans ces exemples, ou infini (exemple : distance à laquelle on a lancé un poids). Nous ne parlerons que d'expériences à univers fini.

d) Événements

On appelle événement tout **ensemble d'issues de l'univers**.

Ce sera un **événement élémentaire** s'il ne comporte qu'une seule issue.

Un événement "**certain**" est un événement qui contiendra à coup sûr l'issue obtenue. C'est donc l'univers entier.

Un événement "**impossible**" ne contient aucune issue : c'est l'ensemble vide.

Deux événements sont dits **disjoints**, ou "**incompatibles**" s'ils ne comportent aucune issue commune.

Exemples :

Dans le lancer de dé, A = {1 ; 2} est un événement, qu'on peut aussi caractériser par la phrase "le résultat est plus petit que 3", ou "le résultat est 1 ou 2", etc...

Dans le tirage de boule, l'événement {Rouge ; Noire} est égal à l'univers, il est donc certain. En effet , la boule qu'on tirera sera rouge ou noire !

e) Langage logique ou ensembliste

On peut parler d'événements sous deux points de vue : le point de vue "logique", qui définit l'événement par une condition, ou le point de vue ensembliste, qui le définit par les issues (ou éléments) qu'il contient.

C'est déjà ce qu'on a fait ci-dessus en parlant d'événement "certain" ou "impossible", ou encore d'événements "incompatibles" (ces termes relèvent de la logique).

Dans ce chapitre, les expressions logiques seront entourées de " pour les distinguer des expressions ensemblistes.

Exemple :

Ci-dessus, A = "le résultat est inférieur à 3" (point de vue logique) ou A = {1 ; 2} (point de vue ensembliste).

2) Détermination d'un univers : exemples

a) Lancer de deux dés

Déterminer l'univers lié à cette expériences selon les points de vue suivants :

. En cherchant la somme des deux chiffres obtenus

. En combinant toutes les issues du premier dé avec toutes celles du second

. En multipliant les deux chiffres obtenus

b) Tirage de boule 3 fois de suite avec remise (boules rouges et noires)

. En tenant compte de l'ordre des tirages

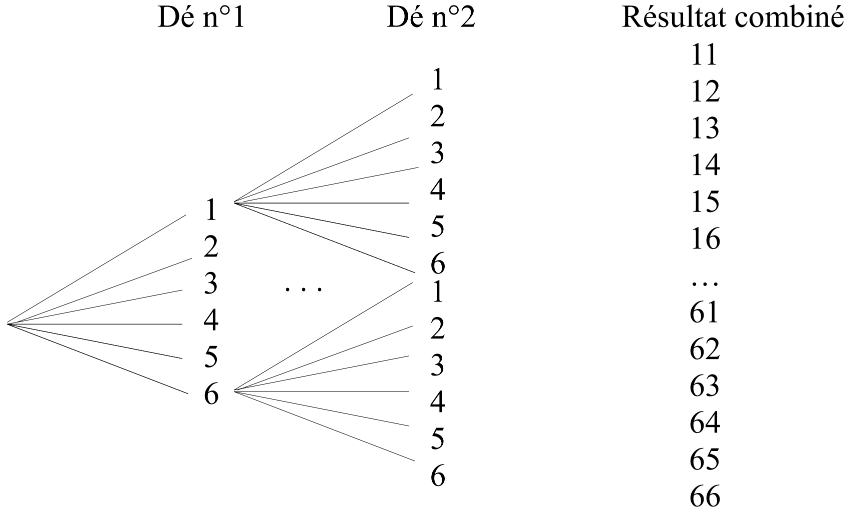
. En cherchant seulement le nombre de boules noires tirées

c) Comment choisir et représenter l'univers

On a vu plus haut qu'il y a plusieurs façons d'associer un univers à une expérience aléatoire, selon le point de vue qui nous intéresse.

Pour pouvoir utiliser le calcul des probabilités, il faut choisir un univers où il soit possible de connaître facilement la probabilité de chaque issue.

Ainsi, si l'on lance une pièce deux fois de suite, les deux lancers étant indépendants, on a la même probabilité d'obtenir pile ou face à chaque lancer. Si on représente cela sous forme d'un arbre, on voit qu'on peut définir un univers où toutes les issues ont la même chance de se produire :



Ω = {11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 16 ; 21 ; … ; 56 ; 61 ; 62 ; 63 ; 64 ; 65 ; 66}

3) Opérations entre événements

a) Complémentaire ("contraire")

À partir d'un événement, on peut construire son contraire ou complémentaire, que l'on notera $\overline{A}$, de la façon suivante : on prend toutes les issues de l'univers qui ne sont pas dans A pour construire son complémentaire.

Pour l'exemple ci-dessus, on aura $\overline{A}$ = {3 ; 4 ; 5 ; 6}.

b) Réunion ("ou inclusif")

Soient A et B deux événements, leur réunion sera notée "A ou B", ou A ∪ B.

Cette réunion est obtenue en prenant toutes les issues qui sont dans A ou dans B, chaque issue n'étant comptée qu'une fois.

Exemples :

{1 ; 2} ∪ {2 ; 3 ; 4} = {1 ; 2 ; 3 ; 4}
Si "l'issue est 1 ou 2" ou "l'issue est 2, 3 ou 4", Alors "l'issue est 1, 2, 3 ou 4".

{1 ; 3 . 4} ∪ {3 ; 4 ; 6} = {1 ; 3 ; 4 ; 6}
Si "l'issue est 1, 3 ou 4" ou "l'issue est 3, 4 ou 6", Alors "l'issue est 1, 3, 4 ou 6".

c) Intersection ("et")

L'intersection de A et B, notée "A et B" ou A ∩ B, est constituée de toutes les issues appartenant à la fois à A et à B.

Exemples :

{1 ; 2} ∩ {2 ; 3 ; 4} = {2}
Si "l'issue est 1 ou 2" et "l'issue est 2, 3 ou 4", Alors "l'issue est 2".

{1 ; 3 . 4} ∩ {3 ; 4 ; 6} = {3 ; 4}
Si "l'issue est 1, 3 ou 4" et "l'issue est 3, 4 ou 6", Alors "l'issue est 3 ou 4".

B) Loi de probabilité

1) Définitions

a) Probabilité d'un événement élémentaire

La probabilité d'un événement élémentaire est la probabilité de l'issue qui la compose.

Cette probabilité peut être constatée expérimentalement (en répétant un grand nombre de fois une expérience et en calculant les fréquences d'apparition de chaque issue) ou calculée théoriquement (elle peut alors être vérifiée expérimentalement).

Par exemple, un dé parfait aura autant de chances de tomber sur chacune de ses six faces, donc la probabilité de chacun des chiffres 1 à 6 sera de 1/6.

Si le dé n'est pas parfait, un grand nombre de lancers peut permettre de calculer la probabilité réelle de chaque issue.

b) Probabilité d'un événement

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de ses issues.

On notera p(A) la probabilité de l'événement A.

2) Propriétés des probabilités

a) Propriétés générales

. Puisque les probabilités sont assimilables à des fréquences, leurs valeurs sont nécessairement comprises entre 0 et 1 : **Pour tout événement A, on aura : $0 \leq p(A) \leq 1$**

. La somme des probabilités de tous les événements élémentaires d'une expérience est égale à 1, puisqu'on obtient ainsi la probabilité de l'univers de l'expérience : **$p(\Omega) = 1$**

. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de ses issues, donc aussi la somme de ses événements élémentaires.

. Le seul événement dont la probabilité est nulle est l'ensemble vide : **$p(\varnothing) = 0$.**

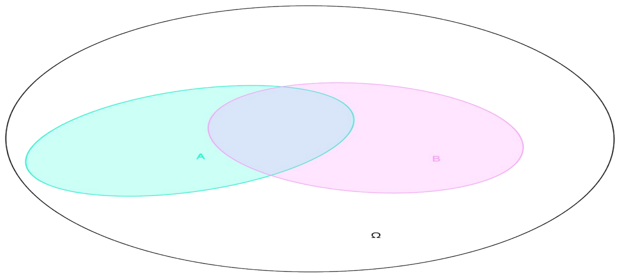
En effet, on ne met pas dans l'univers autre chose que les résultats possibles (issues) de l'expérience, qui ont tous une probabilité non nulle.

b) Propriétés et opérations

. Deux événements disjoints n'ayant pas d'issue commune, il est facile de voir que leur réunion a comme probabilité la somme de leurs probabilités.

Si $A \cap B$ est vide, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

. Soient A et B deux événements quelconques. On peut diviser l'univers en quatre sous-ensembles disjoints selon la figure suivante :



On voit que p(A) + p(B) = p(A ∪ B) + p(A ∩ B) car si on ajoute p(A) et p(B) on compte deux fois la probabilité des issues contenues à la fois dans A et B, c'est à dire la probabilité de l'intersection de A et B. On a donc toujours :

p(A ∪ B) + p(A ∩ B) = p(A) + p(B)

Exemple :

Dans le lancer d'un dé, soit A = {1 ; 3 ; 4} et B = {3; 4 ; 6}

On a p(A) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = ½

On a aussi p(B) = ½ par le même calcul.

Or A U B = {1 ; 3 ; 4 ; 6} d'où sa probabilité de 4/6 = 2/3.

De même, A ∩ B = {3 ; 4} d'où sa probabilité de 2/6 = 1/3

On vérifie bien que 2/3 + 1/3 = 1/2 + 1/2 .

Remarques :

. L'égalité ci-dessus est souvent utilisée sous la forme **p(A ∪ B) = p(A) + p(B) - p(A ∩ B)** car il est souvent plus facile de calculer la probabilité de l'intersection que celle de la réunion.

. Si deux événements sont **disjoints**, on retrouve facilement la formule **p(A ∪ B) = p(A) + p(B)** car dans ce cas p(A ∩ B) = 0 puisque cet événement est vide donc "impossible".

. p(A) + p($\overline{A}$) = 1 puisque A et $\overline{A}$ sont disjoints, donc **p($\overline{A}$) = 1 – p(A)**.

C) Équiprobabilité

1) Définition

On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque toutes les issues de l'univers ont la même probabilité.

Ce cas est très intéressant, car il permet alors facilement de calculer la probabilité des événements simplement en connaissant le nombre de leurs issues.

2) Propriété fondamentale

En effet, si n est le nombre total d'issues, on a, en nommant x_i les issues possibles (i allant de 1 à n), on aura pour tous i et j, $p(x_i) = p(x_j)$, et leur somme sera égale à 1, d'où :

$p(x_1) + p(x_2) + \ldots + p(x_n) = n * p(x_1) = 1$, d'où $p(x_1) = 1/n$, et puisque ces probabilités sont toutes égales,

Pour toute issue x_i, on aura : $p(x_i) = 1/n$.

3) Conséquence

Pour tout événement contenant a issues, on aura $p(A)=\frac{a}{n}$.

Cela permet de calculer facilement les probabilités de chaque événement, simplement en décomptant les issues qu'elles contiennent.

4) Exemples

a) Lancer de deux dés

On lance deux dés supposés parfaits numérotés de 1 à 6

1) Déterminer un univers équiprobable des issues possibles

2) Quelles sont les sommes possibles des deux numéros tirés ?

3) Quelle est la probabilité de faire 2 ? De faire 7 ?

4) Faire un tableau indiquant la probabilité de toutes les sommes possibles.

5) Si vous deviez parier, quel somme choisir et quelles sommes éviter ?

b) Tirage de boules sans remises

On met dans un sac 3 boules vertes, 5 boules rouges et 2 boules noires. On tire (sans remise) trois boules consécutives.

1) Représenter cette expérience avec un arbre et déterminer ainsi un univers équiprobable.

2) Quelle est la probabilité de tirer 3 boules noires ? 3 boules vertes ? 3 boules rouges ?

3) Quelles sont les combinaisons de boules tirées possibles ?

4) Faire le tableau de probabilité de ces combinaisons.

D) Probabilités conditionnelles

1) Définition

On a vu dans le chapitre des statistiques à deux variables les fréquences conditionnelles (fréquences "sachant que").

De la même façon, la probabilité conditionnelle est une probabilité "sachant que".

On note $p_B(A)$ la probabilité de A sachant B.

2) Exemples

a) Lancer de deux dés de 6

La probabilité de faire la somme 10 sachant que le premier dé est un 6 sera de 1/6, puisque le seul cas favorable sera 6 et 4.

La probabilité de faire la somme 10 sachant que l'un des dés fait un 6 sera de 2/6, puisque les seuls cas favorables seront 6 et 4 ou 4 et 6.

La probabilité de faire la somme 10 sachant que le produit des deux dés est 10 sera de 2/6, puisque les seuls cas favorables seront 5 et 2 ou 2 et 5.

b) Ateliers de fabrication de chaussures

Une entreprise a deux ateliers de fabrication de chaussures. L'atelier 1 produit 60% des chaussures dont 2% sont défectueuses, l'atelier 2 ne faisant que 1% de chaussures non conformes.

On suppose que ces données restent constantes et le tableau suivant représente la production d'un jour.

	Paires sans défaut	Paires défectueuses	Total
Atelier 1		120	
Atelier 2			
			10000

- Compléter ce tableau.

On prélève au hasard une des 10000 paires de chaussures.

A est l'événement "Elle vient de l'atelier A" et D l'événement "La paire est défectueuse".

- Que vaut p(A) ?
- Que vaut p(D) ?
- Que vaut $p(A \cap D)$?
- Que vaut la probabilité conditionnelle $p_D(A)$?
- Que vaut $p_A(D)$?

3) Règle

Soit deux événements A et B avec p(B) non nulle. On a alors :

$$p_B(A)=\frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

4) Propriétés

Comme p dans l'univers de départ Ω, p_B est une probabilité mais cette fois dans l'univers B. Elle en a donc toutes les caractéristiques, comme :

Pour tout événement A, on aura : $0 \leq p_B(A) \leq 1$

$$p_B(B) = 1$$

$$p_B(A \cup C) + p_B(A \cap C) = p_B(A) + p_B(C)$$

$$p_B(\overline{A}) = 1 - p_B(A)$$

De plus, on a aussi (si A et B sont de probabilité non nulle) :

$$p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B) = p_A(B) \times p(A)$$

Cela se déduit facilement de la règle ci-dessus.

E) Arbres, événements indépendants

1) Arbres pondérés

La représentation d'une probabilité sous forme d'arbre peut se faire même si l'on n'est pas dans un cadre d'équiprobabilité.
La probabilité d'un point d'arrivée sera le produit des probabilités des chemins empruntés pour y arriver.

Exemples :

a) Fabrique de chaussures

En notant $B = \overline{A}$ on part de :
$p(A) = 0,6$ d'où $p(B) = 0,4$
$p_A(D) = 0,02$ d'où $p_A(\overline{D}) = 0,98$
$p_B(D) = 0,01$ d'où $p_B(\overline{D}) = 0,99$

D'où l'arbre suivant :

Étape 1	Étape 2	Résultat	Probabilité du résultat
	$p_A(D) = 0,02$	$\mathbf{A \cap D}$	$p(A) \times p_A(D) = 0,6 \times 0,02 = 0,012$
$p(A) = 0,6$	$p_A(\overline{D}) = 0,98$	$\mathbf{A \cap \overline{D}}$	$p(A) \times p_A(\overline{D}) = 0,6 \times 0,98 = 0,588$
Départ	$p_B(D) = 0,01$	$\mathbf{B \cap D}$	$p(B) \times p_B(D) = 0,4 \times 0,01 = 0,004$
$p(B) = 0,4$	$p_B(\overline{D}) = 0,99$	$\mathbf{B \cap \overline{D}}$	$p(B) \times p_B(\overline{D}) = 0,4 \times 0,99 = 0,396$

b) Lancer de deux pièces truquées

On lance deux pièces dont la première a 70% de chances de tomber sur pile et l'autre 60% de chances de tomber sur faces.

Faire un arbre et calculer les probabilités des résultats PF, PP, FF, FP.

2) Événements indépendants

a) Définition

Deux événements sont sont indépendants si et seulement si on a $\mathbf{p_B(A) = p(A)}$, ce qui est équivalent à $\mathbf{p_A(B) = p(B)}$ et aussi à $\mathbf{p(A \cap B) = p(A) \times p(B)}$.

Remarque :
Ne pas confondre :
A et B incompatibles (ou disjoints) qui correspond à $p(A \cap B) = 0$ car $\mathbf{A \cap B = \varnothing}$
et :
A et B indépendants qui correspond à $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

b) Exemple 1

Soit un tirage répété 2 fois de boules rouges, vertes et blanches.

On suppose qu'on a au départ 2 blanches, 4 vertes et 6 rouges.

Si les tirages se font avec remise (on remet la boule tirée dans le sac avant de tirer la seconde), le second tirage sera-t-il indépendant du premier ?

Si c'est sans remise y aura-t-il aussi indépendance des deux tirages ?

Faire dans chaque cas l'arbre des probabilités pondéré.

Vérifier que les événements "la première boule tirée est rouge" et "la seconde boule tirée est rouge" sont indépendants dans le premier cas et non dans le second.

c) Exemple 2

Soit un jeu de cartes ou l'on tire une seule carte au hasard.

Les événements "tirer un carreau" et "tirer un as" sont-ils indépendants ?

d) Exemple 3

Reprenons l'exemple de la fabrique de chaussures.

Les événements "Fabriqué par l'atelier A" et "Paire défectueuse" sont-ils indépendants ?

Les Probabilités – Fiche de révision

Propriétés des probabilités

Pour tout événement A, on aura : $0 \leq p(A) \leq 1$

$p(\Omega) = 1$ et $p(\emptyset) = 0$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Équiprobabilité

Pour toute issue x_i, on aura : $p(x_i) = 1/n$.

$$p(A) = \frac{a}{n}$$

Avec n = nombre d'issues dans Ω et a = nombre d'issues dans A.

Probabilité conditionnelle

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Pour tout événement A, on aura : $0 \leq p_B(A) \leq 1$

$p_B(B) = 1$

$p_B(A \cup C) + p_B(A \cap C) = p_B(A) + p_B(C)$

$p_B(\overline{A}) = 1 - p_B(A)$

$p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B) = p_A(B) \times p(A)$

Probabilité en arbre pondéré

La probabilité d'un point d'arrivée sera le produit des probabilités des chemins empruntés pour y arriver.

Événements indépendants

A et B indépendants $\iff$ $p_B(A) = p(A)$ $\iff$ $p_A(B) = p(B)$ $\iff$ $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$