Chapitre 1 – Les nombres complexes

A) Définition et propriétés de base (rappels)

1) Définition

a) On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Un nombre complexe s'écrit $z=a+bi$, où a et b sont des réels et i est un nombre (non réel) tel que $i^2=-1$.
Cette écriture est dite "forme algébrique" du nombre complexe.
a est la partie réelle, et b la partie imaginaire de z.

b) Cas particuliers

Si b = 0, z est un nombre réel ($\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$)
Si a = 0, z est dit "imaginaire pur".

Exemples :
4, -15, 1/3 sont des réels
1 – i ; 3 – 2i sont des complexes
i ; -i ; 5i ; -3i sont des imaginaires purs.

c) Conjugué d'un complexe

On appelle complexe conjugué, ou conjugué de $z=a+bi$, et on note $\bar{z}$, que l'on prononce "**z barre**" le nombre $\bar{z}=a-bi$.

2) Propriétés de base

$$a+bi=a'+b'i \iff a=a' \text{ et } b=b'$$

$$(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i$$

$$(a+bi)(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i$$

$$z\bar{z}=a^2+b^2$$

$$z+\bar{z}=2a$$

B) Représentation géométrique

1) Définition

De par sa définition, tout nombre complexe correspond de façon biunivoque à un point dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$. Si z = a + ib, a sera l'abscisse du point et b son ordonnée.

De même, tout vecteur représente un nombre complexe et un seul, suivant le même système.

Un point M étant défini entièrement par sa distance à l'origine **ρ = OM** et par l'angle entre $\vec{u}$ et le

vecteur $\overrightarrow{OM}$, $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$, un nombre complexe est aussi défini par ces deux données, qu'on appelle alors le <u>module</u> (noté **|z|**) et <u>l'argument</u> (noté **Arg(z)**).
On écrit alors z = **[ρ ; θ]**. Ceci s'appelle la forme trigonométrique.

<u>Remarques :</u>

- Le nombre O n'a pas d'argument.
- L'argument d'un complexe est seulement défini à 2kπ près !
- Le point d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique du point d'affixe z par rapport à l'axe des abscisses.

<u>2) Passage d'une forme à l'autre</u>

- z = a + bi $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$
  Calcul de θ : On cherche $\cos^{-1}(a/\rho)$, c'est la bonne réponse si b>0, sinon, on change son signe.
- z = [ρ ; θ]   a = ρ cos(θ) et b = ρ sin(θ), soit z = ρ(cos(θ) + i sin(θ))

<u>3) Différence de deux complexes</u>

Si z_1 représente M_1 (et donc $\overrightarrow{OM_1}$), et z_2 représente M_2 (et donc $\overrightarrow{OM_2}$), la différence $z_2 - z_1$ représentera $\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_2O} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

En particulier, **la distance M_1M_2 vaudra $|z_2 - z_1|$**.

<u>C) Calculs sous forme trigonométrique</u>

<u>1) Produit de complexes</u>

Le produit de **z = [ρ ; θ] par z' = [ρ' ; θ']** est : $\boxed{\mathbf{z\,z' = [\rho\,\rho' \,;\, \theta + \theta']}}$.

Autrement dit, les modules se multiplient et les arguments s'ajoutent. *(Démontrer)*

<u>2) Puissances d'un complexe</u>

$$\boxed{|z^n| = |z|^n \quad \text{et} \quad \mathrm{Arg}(z^n) = n\,\mathrm{Arg}(z)}$$

soit, si z = [**ρ ; θ], z^n = [ρ^n ; nθ]**

<u>Exemple :</u>

z = [3 ; π/4] $z^5 = [3^5 ; 5\pi/4] = [243 ; -3\pi/4]$

<u>3) Inverse d'un complexe</u>

$$\boxed{\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \quad \text{et} \quad Arg\left(\frac{1}{z}\right) = -Arg(z)}$$

On peut retrouver ce résultat en faisant n = -1 dans le 2) ci-dessus.

<u>4) Quotient de deux complexes</u>

$$\boxed{\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{et} \quad Arg\left(\frac{z}{z'}\right) = Arg(z) - Arg(z')}$$

<u>Devoir :</u>

Exercice 46 page 257

D) Notation exponentielle des complexes

1) Définition et propriétés de base

a) Au lieu d'écrire $z = [\rho\ ;\ \theta]$, écrivons $z = \rho\, e^{i\theta}$

Avec $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, pour retrouver les égalités $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.
Le fait de mettre z sous forme de puissance permet de retenir facilement que la multiplication se transforme en addition pour les arguments (comme pour les puissances) :

$$\boxed{e^{i\theta}\, e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}}$$

b) On retrouve naturellement les formules du C)

$$z\,z' = \rho\, e^{i\theta}\ \rho'\ e^{i\theta'} = \rho\ \rho'\ e^{i(\theta+\theta')}$$

$$z^n = \rho^n\, e^{in\theta}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$$

c) Formule de Moivre

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

autrement dit, $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

A l'aide de cette formule, on peut exprimer $\cos(n\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ et de $\cos(\theta)$, en développant le côté gauche de l'égalité.

Exemple :

Exprimer cos(2x) et sin(2x) en fonction de sin(x) et cos(x).
En déduire l'expression de $\cos^2(x)$ et $\sin^2(x)$ en fonction de cos(2x).
Indice : utiliser aussi la formule $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

d) Formule d'Euler

On sait que $e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos(\theta) - i \sin(\theta)$.
En combinant cette formule avec $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, et en résolvant en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ ce système de deux équations à deux inconnues, on trouve :

$$\boxed{\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$$

Exercices :

6, 7, 8 page 252, 12 page 253 et 24 page 254

E) Equations du second degré

1) Origine des nombres complexes

Le nombre i ou $\sqrt{-1}$, a été inventé pour nommer la "solution" de l'équation du second degré qui s'écrit $x^2 + 1 = 0$.
Cette équation du second degré n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$: son discriminant ($b^2 - 4ac$) est : $0^2 - 4 * 1 * 1 = -4$, donc négatif (on peut aussi dire qu'un nombre négatif n'a pas de racine carrée, du moins dans les réels !).

On a donc inventé un nombre, non réel (on l'appelle imaginaire pur), qu'on a appelé i, et qui serait la solution de cette équation, c'est à dire qu'on aurait $i^2 = -1$.

Remarque : Cela veut dire qu'il y a aussi une autre solution à cette équation, à savoir -i, puisqu'en élevant -i au carré, - par - fait + et i par i fait i^2 !

2) Application à la résolution des équations du second degré à discriminant négatif

Prenons une équation du second degré quelconque.
Si on applique la méthode connue pour $b^2 - 4ac > 0$, on trouve

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Quand le discriminant $b^2 - 4ac$ est négatif, ces solutions n'existent pas dans $\mathbb{R}$, mais existent dans $\mathbb{C}$, car la racine carrée d'un nombre négatif y est possible : par exemple $(2i)^2 = 4i^2 = 4(-1) = -4$!
Ainsi, si $b^2 - 4ac < 0$, on remplacera $\sqrt{b^2-4ac}$ par $i\sqrt{4ac-b^2}$. On trouve donc deux solutions dans $\mathbb{C}$ lorsque $b^2 - 4ac < 0$, à savoir

$$\boxed{x_1=\frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}}.$$

Grâce à cela, on peut dire que :

Toute équation du second degré du type $ax^2 + bx + c = 0$ à coefficients réels admet deux solutions, réelles ou complexes, distinctes ou confondues.

Si l'une des solutions n'est pas réelle, les deux solutions seront des nombres complexes conjugués.

Plus généralement, **toute équation de degré n admet n solutions, réelles ou complexes, distinctes ou confondues** ***(Théorème fondamental de l'algèbre)***.

Exemples :

Résoudre les équations :
$x^2 + 1 = 0$
$8x^2 + 4x + 3 = 0$
$x^2 - 6x + 10 = 0$

Exercices :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 page 252 puis 8, 10, 16, 35, 36 page 253

F) Linéarisation de Polynômes Trigonométriques

1) Principe

Grâce aux formules de Moivre, on peut trouver des relations entre les puissances des sinus et cosinus et les sinus et cosinus de multiples des angles concernés.

On peut aussi utiliser à cet effet les formules d'Euler vues plus haut.

2) Applications

a) Linéarisation des carrés

$$\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}$$
$$\sin^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}$$

c) Transformation des sommes en produits et vice-versa

- **cos (a + b) = cos a cos b - sin a sin b**
- **cos (a - b) = cos a cos b + sin a sin b**
- **sin (a + b) = sin a cos b + sin b cos a**
- **sin (a - b) = sin a cos b – sin b cos a**

Par somme des deux premières et des deux dernières, on trouve

- $\cos a \cos b = \dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$
- $\sin a \sin b = \dfrac{\cos(a+b)-\cos(a-b)}{2}$
- $\sin a \cos b = \dfrac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$

Exemples :

appliquer les formules ci-dessus aux expressions suivantes :
. P(x) = cos 3x sin 5x
On pose a = 5x et b = 3x, d'où P(x) = (sin 8x + sin 2x)/2

. P(x) = $\sin^3(2x)$
On utilise la formule d'Euler et on regroupe les puissances opposées deux à deux, d'où :
P(x) = (3sin(2x) - sin(6x))/4

Détail :

$$\sin^3(2x)=\left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)^3=\frac{e^{6ix}-3e^{4ix}e^{-2ix}+3e^{2ix}e^{-4ix}-e^{-6ix}}{8i^3}=\frac{e^{6ix}-e^{-6ix}}{-8i}+3\frac{-e^{2ix}+e^{-2ix}}{-8i}$$
$$\sin^3(2x)=-\frac{\sin(6x)}{4}+3\frac{\sin(2x)}{4}=\frac{3\sin(2x)-\sin(6x)}{4}$$

Devoir maison :

Exercice 48 page 257

Complexes : Fiche de révision

Forme algébrique : $z = a + b\,i$ avec i = le nombre complexe tel que $i^2 = -1$

Forme trigonométrique : $z = [\rho\ ;\ \theta]$ avec $\theta = \mathrm{Arg}(z)$ (argument de z) et $\rho = |z|$ (module de z)

Forme exponentielle: $z = \rho\, e^{i\theta}$ avec $\theta = \mathrm{Arg}(z)$ (argument de z) et $\rho = |z|$ (module de z)

Formules en format algébrique :

$$a + bi = a' + b'i \iff a = a' \text{ et } b = b'$$

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$$

$$(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$$

$$z\bar{z} = a^2 + b^2$$

$$z + \bar{z} = 2a$$

Passage d'une forme à l'autre

- $z = a + bi$ $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$
  Calcul de θ : *On cherche* $\cos^{-1}(a/\rho)$, *c'est la bonne réponse si b>0, sinon, on change son signe pour trouver θ.*
- $z = [\rho\ ;\ \theta]$ $a = \rho\cos(\theta)$ et $b = \rho\sin(\theta)$, soit $z = \rho\cos(\theta) + i\,\rho\sin(\theta)$

Distance entre deux points complexes $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$. $M_1M_2 = |z_2 - z_1|$.

Formules en format trigonométrique :	Formules en format exponentielle :
$[\rho\ ;\ \theta] * [\rho'\ ;\ \theta'] = [\rho\rho'\ ;\ \theta + \theta']$	$\rho\, e^{i\theta} * \rho'\, e^{i\theta'} = \rho\rho'\, e^{i(\theta+\theta')}$
$[\rho\ ;\ \theta]^n = [\rho^n\ ;\ n\theta]$	$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$
$1 / [\rho'\ ;\ \theta'] = [1/\rho'\ ;\ -\theta']$	$\dfrac{1}{\rho\, e^{i\theta}} = \dfrac{1}{\rho} e^{-i\theta}$
$[\rho\ ;\ \theta] / [\rho'\ ;\ \theta'] = [\rho/\rho'\ ;\ \theta - \theta']$	$\dfrac{\rho\, e^{i\theta}}{\rho'\, e^{i\theta'}} = \dfrac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$

Formules d'Euler : $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

Formule de Moivre : $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Équation du second degré : $x_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$