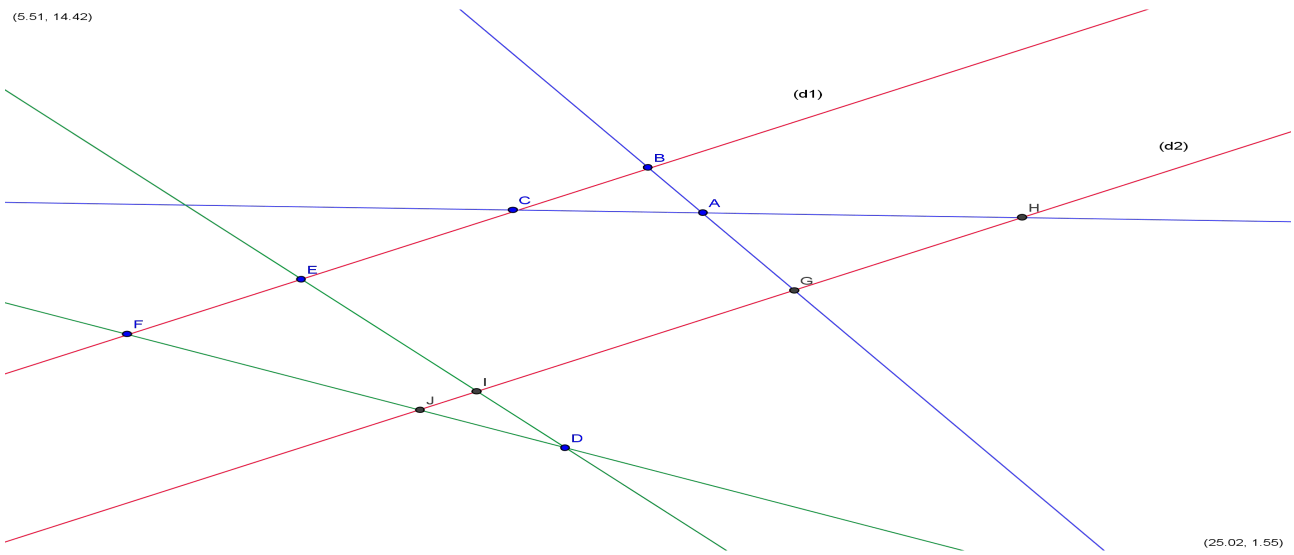
# Chapitre 11 – Compléments de géométrie

## *A) Triangles, angles*

### *1) Théorème de Thalès et triangles semblables*

Dans ces deux configurations (triangles de sommet A et triangles de sommet D), si (d1) // (d2), on peut appliquer le théorème de Thalès, à savoir :




$\frac{AB}{AG}=\frac{AC}{AH}=\frac{BC}{GH}$ (triangles de sommet A) et $\frac{DI}{DE}=\frac{DJ}{DF}=\frac{IJ}{EF}$ (triangles de sommet D)

On dit que ces triangles ont leurs côtés proportionnels.

Réciproquement, Si dans une de ces deux configurations on a $\frac{AB}{AG}=\frac{AC}{AH}=\frac{BC}{GH}$ ou $\frac{DI}{DE}=\frac{DJ}{DF}=\frac{IJ}{EF}$ , Alors les droites (d1) et (d2) sont parallèles.

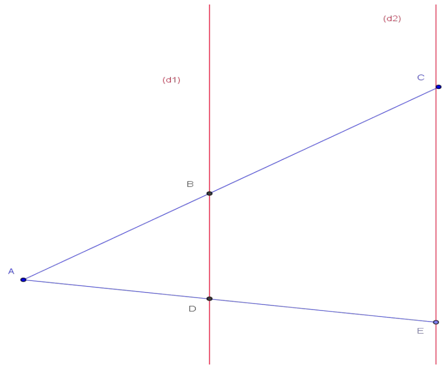
***Le théorème de Thalès s'applique aussi aux triangles semblables, c'est à dire qui ont leurs angles égaux deux à deux, sans recourir au parallélisme.***

***Et réciproquement, deux triangles qui ont leurs côtés proportionnels sont semblables.***

**Exemples :**

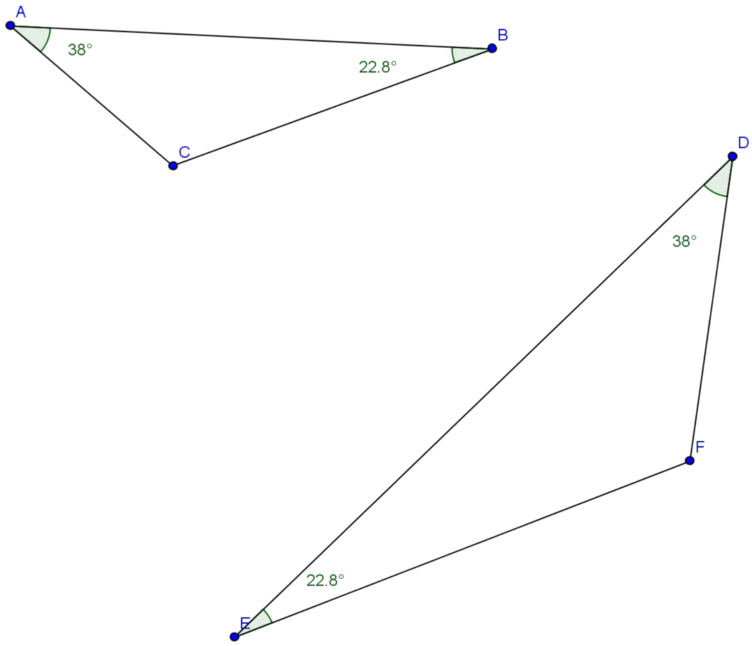
#### *a) Dans la figure ci-dessous, on a (d1) // (d2), AB = 2 et AC = 5.*

Si AD = 2,5 et CE = 2, que valent AE et BD ?



***b)Dans la figure ci-dessous, on a AB = 9, BC = 7 et AC = 4.***

Si ED = 12, que valent FE et FD ?




## *2) Triangles rectangles*

### *a) Le théorème de Pythagore et sa réciproque*

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés (théorème de Pythagore).

Si dans un triangle le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle et le grand côté est son hypoténuse (réciproque du théorème de Pythagore, vraie aussi).

**En résumé :**

Un triangle est rectangle si et seulement si le carré de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

### *b) Trigonométrie*

Dans un triangle ABC rectangle en A, on a

$$\cos(\hat{B}) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BA}{BC} \qquad \sin(\hat{B}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

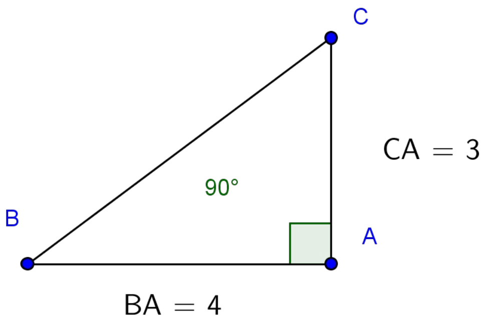
$$\tan(\hat{B}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AC}{AB} \qquad cotan(\hat{B}) = \frac{1}{\tan(\hat{B})} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{côté opposé}} = \frac{AB}{AC}$$

### *c) Cercles*

Un triangle est rectangle si et seulement si un de ses côtés est le diamètre du cercle circonscrit : ce côté est alors l'hypoténuse.

### *d) Exemples*

- Calculer BC
- Calculer $\cos(\hat{C})$ et $\sin(\hat{C})$
- Calculer IA




## *3) Formules pour les triangles quelconques*

Soit ABC un triangle, avec a = BC, b = AC et c = AB.

**Formules d'Al Kashi :**

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\ \cos(\hat{A})$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\ \cos(\hat{B})$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\ \cos(\hat{C})$

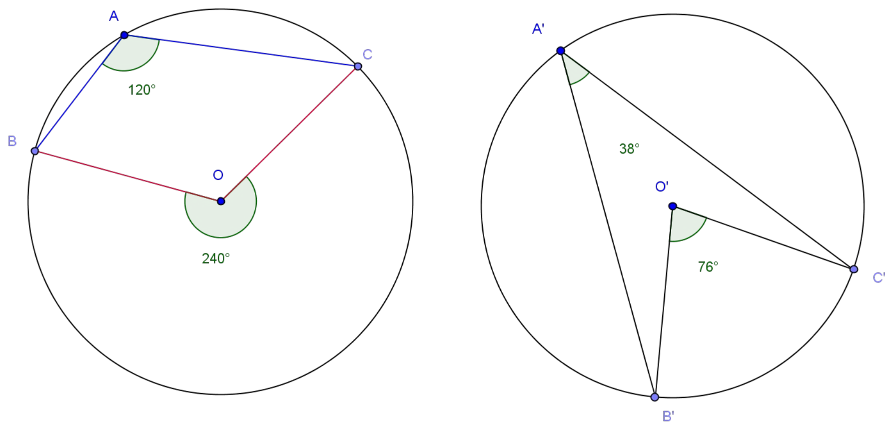
**Formule des trois sinus :**

Soit S l'aire du triangle ABC, on aura :

$$\frac{abc}{2S}=\frac{a}{\sin(\hat{A})}=\frac{b}{\sin(\hat{B})}=\frac{c}{\sin(\hat{C})}$$

## *4) Angles inscrits, angles au centre*

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, A et B et C trois points de $\mathcal{C}$.
L'angle inscrit $\widehat{BAC}$ est égal à la moitié de l'angle au centre $\widehat{BOC}$ , et ceci dans les deux configurations ci-dessous.



Bien entendu, changer la position du point A sur le cercle entre B et C ne changera pas la valeur de l'angle $\hat{A}$ .

# B) Géométrie analytique

## 1) Repères, coordonnées

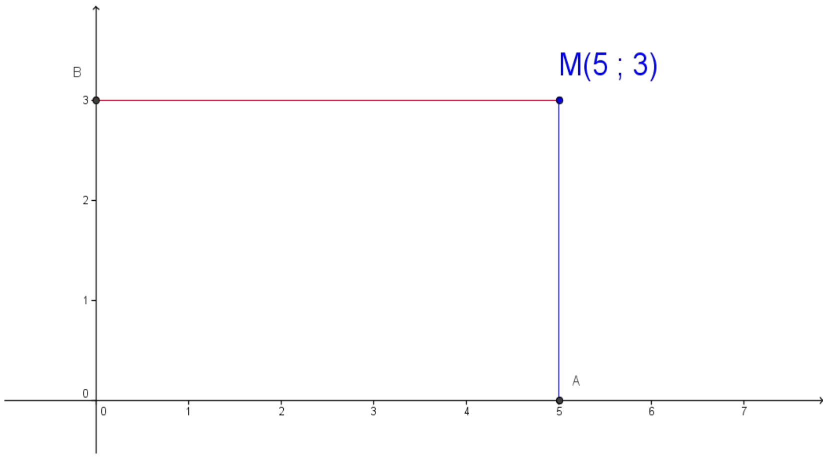
Dans le plan, étant donné un repère (O , $\vec{i}$ , $\vec{j}$ ) chaque point est repéré par deux réels, son abscisse x et son ordonnée y, tels que :

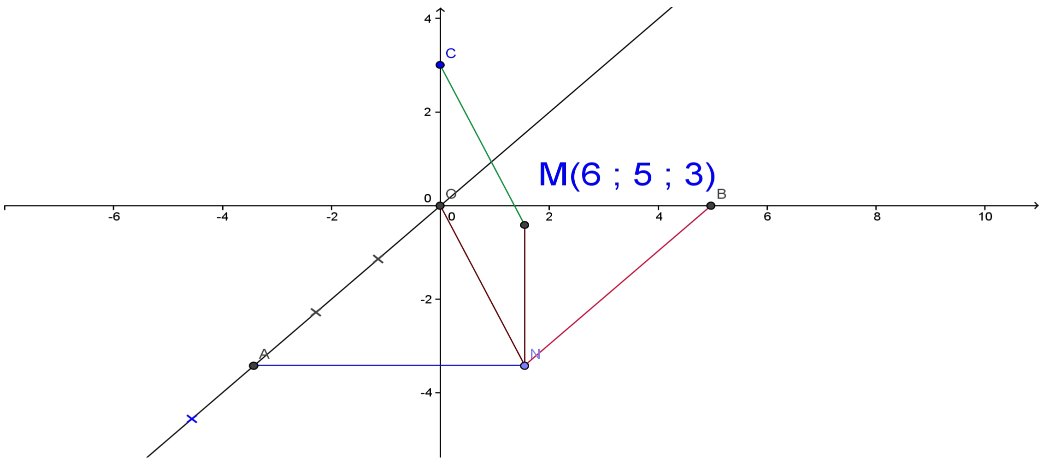
$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ On note alors M(x ;y).

Dans l'espace, on prend un repère O , $\vec{i}$ , $\vec{j}$ , $\vec{k}$ ) et chaque point aura trois coordonnées x, y et z tels que

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ On note alors M(x ;y ;z).

**Exemples :**




## 2) Calculs sur les coordonnées

### a) Milieu et barycentre

Soit A($a_1$ ; $a_2$ ; $a_3$) et B($b_1$ ; $b_2$ ; $b_3$)

Le milieu I du segment [AB] sera I $\left(\frac{a_1+b_1}{2} ; \frac{a_2+b_2}{2} ; \frac{a_3+b_3}{2}\right)$ .

Le barycentre de A et B affectés des poids m et n sera B $\left(\frac{m a_1+n b_1}{m+n} ; \frac{m a_2+n b_2}{m+n} ; \frac{m a_3+n b_3}{m+n}\right)$ .

(Le milieu est le barycentre de A et B affectés du poids 1 tous les deux).

### *b) Coordonnées des vecteurs*

Soit A($a_1$ ; $a_2$ ; $a_3$) et B($b_1$ ; $b_2$ ; $b_3$), on a alors $\vec{AB}(b_1-a_1 ; b_2-a_2 ; b_3-a_3)$ .

On a aussi $\vec{OA}(a_1 ; a_2 ; a_3)$ et $\vec{OB}(b_1 ; b_2 ; b_3)$

**Exemples :**

Soit A(3 ; -2 ; 1), B(2 ; -1 ; 4) et C(-2 ; 1 ; 4)
Trouver les coordonnées de I milieu de [AB], puis de $\vec{BC}, \vec{AI}, \vec{IC}$ et $\vec{IB}$ .

## *3) Colinéarité, parallélisme, alignement*

### *a) Définition*

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires quand $\vec{u}=k\vec{v}$ avec k réel.

### *b) Propriétés*

I) (AB) // (CD) <=> $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ colinéaires

II) A, B, C alignés <=> $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ colinéaires

III) Soit $\vec{u}$ (x ;y) et $\vec{v}$ (x' ;y') : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires <=> xy' – x'y = 0

IV) Soit $\vec{u}$ (x ;y ;z) e $\vec{v}$ (x' ;y' ;z') :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires <=> $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que x' = k x et y' = k y et z' = k z

### *c) Exemples*

- Prouver que $\vec{u}$ (2 ;3 ;1) et $\vec{v}$ (6 ;9 ;3) sont colinéaires
- Soit A(2 ;1), B(6 ;2) et C(10 ;3) prouver que A, B et C sont alignés.
- Soit D(4 ;1) et E(8 ;2) prouver que (AB) // (DE)
- Prouver que $\vec{u}$ (4 ;1) et $\vec{v}$ (-8 ;-2) sont colinéaires

## *4) Aires et volumes*

### *a) Triangle*

Si b = base et h = hauteur, $S=\frac{bh}{2}$ .

### *b) Trapèze*

Si b = petite base, B = grande base et h = hauteur, $S=\frac{(b+B)}{2}h$ .

### *c) Disque*

Si R = rayon, on aura S = π R²

### *d) Secteur angulaire*

Si $\alpha$ est l'angle en radian, on aura $S = \alpha R^2 / 2$.

### *d) Volume des Cylindres, prismes*

Avec B = aire de la base et h = hauteur, on aura $V = B \times h$.

### *e) Volume des Pyramides*

Avec B = aire de la base et h = hauteur, on aura $V = B \times h / 3$.

### *f) Volume du Tronc de pyramide*

Avec B = aire d'une base, b = aire de l'autre base et h = hauteur, on aura $V=\frac{h}{3}(B+\sqrt{Bb}+b)$ .

### *g) Volume du Cône*

Avec R = rayon de la base et h = hauteur, on aura $V = \pi R^2 / 3$

### *h) Volume du Tronc de cône*

Avec R = rayon de la base, r = rayon de la petite base et h = hauteur, on a $V=\pi \frac{h}{3}(R^2+Rr+r^2)$ .

### *i) Sphère*

Aire $A=4\pi R^2$

Volume $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

### *j) Exercices*

Retrouver la formule du tronc de cône à l'aide de celle du cône.

Retrouver toutes ces formules par les intégrales.

# Compléments de géométrie – Fiche de révision

***Triangles semblables (mêmes angles, généralise Thalès et le théorème des milieux) :***

$$\text{ABC et DEF sont semblables} \Leftrightarrow \frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$$

***Triangles rectangles :***

**Pythagore : ABC est rectangle en A** $\Leftrightarrow BC^2=AB^2+AC^2$

**ABC est rectangle en A** $\Leftrightarrow$ **A est sur le cercle de diamètre [BC]**

***Trigonométrie : dans un triangle ABC rectangle en A, on a***

$$\cos(\hat{B})=\frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}=\frac{BA}{BC} \qquad \sin(\hat{B})=\frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}=\frac{AC}{BC}$$

$$\tan(\hat{B})=\frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}=\frac{AC}{AB} \qquad cotan(\hat{B})=\frac{1}{\tan(\hat{B})}=\frac{\text{côté adjacent}}{\text{côté opposé}}=\frac{AB}{AC}$$

***Triangles quelconques :***

Formules d'Al Kashi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos(\hat{A})$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,\cos(\hat{B})$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos(\hat{C})$$

Formule des trois sinus *Si S est l'aire du triangle ABC, on aura :*

$$\frac{a\,b\,c}{2S}=\frac{a}{\sin(\hat{A})}=\frac{b}{\sin(\hat{B})}=\frac{c}{\sin(\hat{C})}$$

***Angles et cercle de centre O :***

*Un angle inscrit $\overrightarrow{ABC}$ est égal à la moitié de l'angle au centre $\overrightarrow{AOC}$*

***Milieu I de [AB] avec A($a_1$ ; $a_2$) et B($b_1$ ; $b_2$) :***

$$I\left(\frac{a_1+b_1}{2}\ ;\ \frac{a_2+b_2}{2}\ ;\ \frac{a_3+b_3}{2}\right)$$

***Vecteurs :***

$$Si\ A(a_1\ ;\ a_2)\ et\ B(b_1\ ;\ b_2),\ on\ aura\ \overrightarrow{AB}(b_1-a_1\ ;\ b_2-a_1)$$

***(AB) // (CD) <=> $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires***

***A, B, C alignés <=> $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires***

*Soit* $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ : - $\vec{u}$ ***et*** $\vec{v}$ ***colinéaires <=> x y' – x' y = 0***

$\vec{u}$ ***et*** $\vec{v}$ ***orthogonaux <=> x x' + y y' = 0***