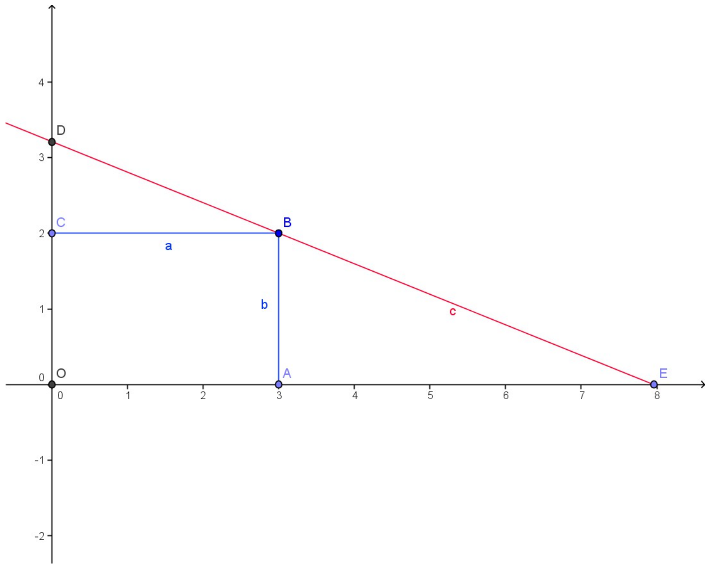
Chapitre 3 – Les limites

A) Introduction

1) Le grenier

Je veux monter un toit à une pente en laissant la place pour une pièce (grenier) de 3 mètres de long et 2 mètres de haut.



OA = 3, OC = 2, OE = x.

a) Que vaut OD en fonction de x ?

en appliquant le théorème de Thalès entre EAB et EOD, on trouve : $\frac{OE}{AE} = \frac{OD}{AB}$ d'où $OD = \frac{2x}{x-3}$.

b) Imaginons un toit très pentu (E se rapproche de A)

Que devient la hauteur OD ? (OD → +∞)

Exemples :

x = 3,1 : OD = ? *(62)* x = 3,01 : OD = ? *(602)*

a) A l'inverse, toit très peu incliné : x → +∞, et OD → 2.

b) Dans ces deux cas, la fonction $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ va « tendre vers une limite », infinie dans le cas b) et finie (=2) dans le c).

Exemples :

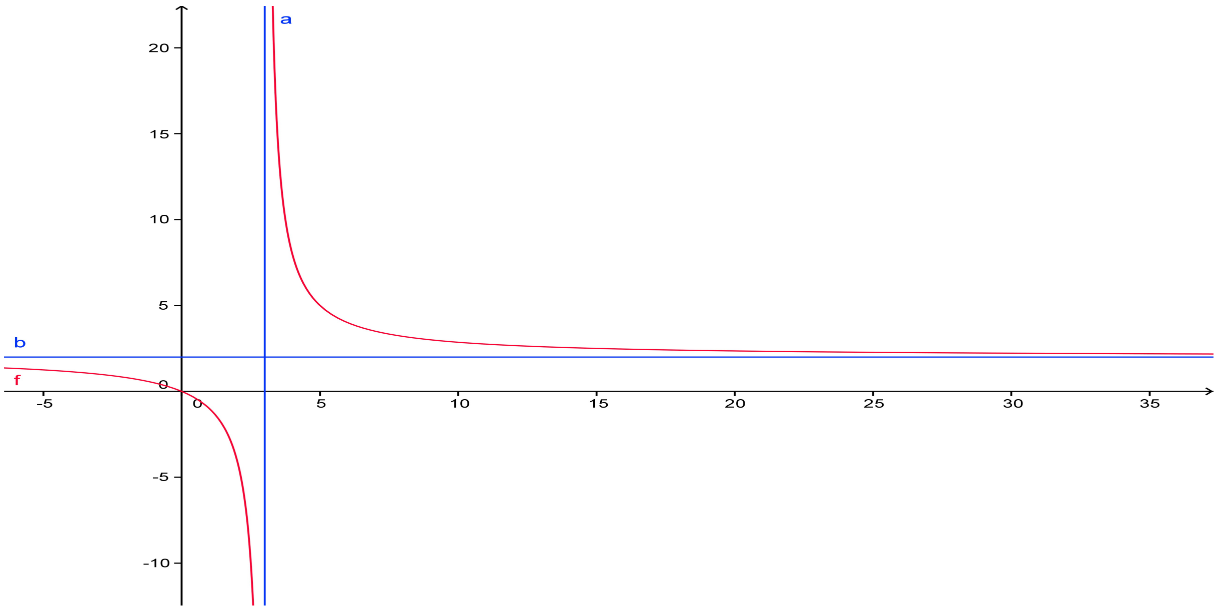
x = 13 : OD = ? *(2,6)* x = 1003 : OD = ? *(2,006)*

5/10/08

c) Étude de la fonction $f(x) = \frac{2x}{x-3}$

Dérivée $f'(x) = \dfrac{2(x-3)-2x}{(x-3)^2} = \dfrac{-6}{(x-3)^2}$.

x	3		+∞
f(x)	|| -∞	-	0
f'(x)	|| +∞	décroissante	2



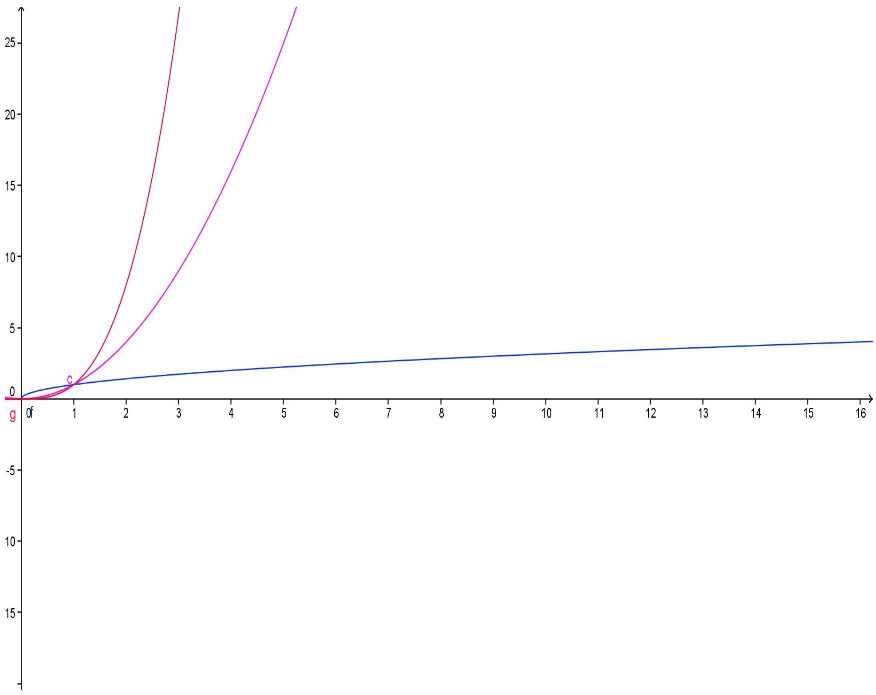
On voit que c'est une hyperbole dont les axes ont pour équations x=3 et y=2.

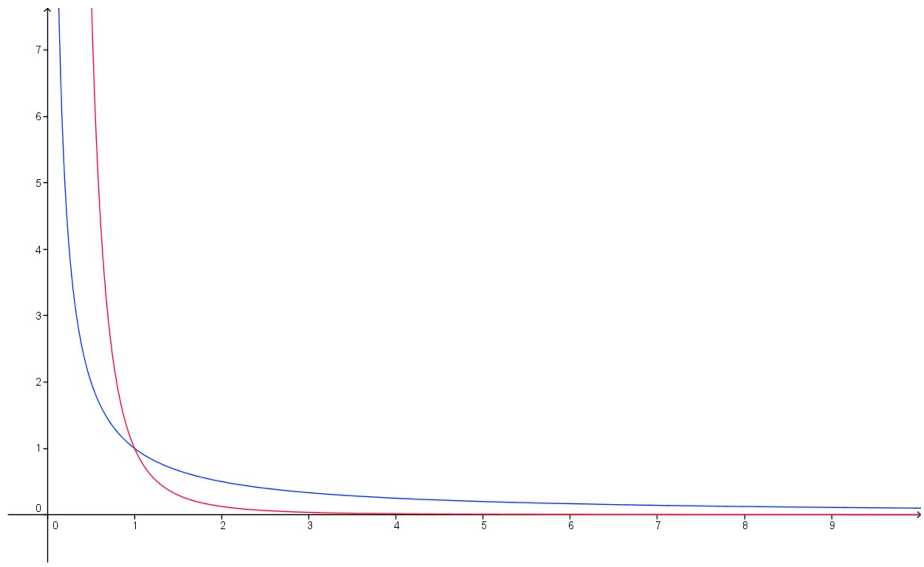
B) Limites des fonctions de référence

1) Limites en +∞

Compléter

x	100	10000	10^{10}	10^{20}	+∞
$\sqrt{x}$	10	100	100 000	10^{10}	+∞
x^2	10 000	10^8	10^{20}	10^{40}	+∞
x^3	1 000 000	10^{12}	10^{30}	10^{60}	+∞
$\dfrac{1}{x}$	0,01	0,00001	10^{-10}	10^{-20}	0+
$\dfrac{1}{x^2}$	0,0001	10^{-8}	10^{-20}	10^{-40}	0+





Mathématiquement, le fait de dire que la limite de $\frac{1}{x}$ quand x tend vers zéro (tout en restant positif) est +∞ correspond à la phrase suivante :
«Quelque soit le nombre M (aussi grand soit-il), on peut trouver un nombre α (proche de zéro) tel que f(x) soit plus grand que M pour tous les x inférieurs à α en valeur absolue».

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+},\ \exists \epsilon > 0 \ \text{ tel que } \ x < \epsilon \Rightarrow f(x) > M .$$

<u>Ici, on a :</u>

Soit M = 10^n, n aussi grand que l'on veut : il suffit de choisir α = 0,5 . 10^{-n} pour constater que si x < α, alors $\frac{1}{x} > \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0{,}5.10^{-n}} = \frac{2}{10^{-n}} = 2.10^{n} > M$

On note alors $\lim_{x \to 0} (\frac{1}{x}) = +\infty$.

En résumé :

Si n est un entier naturel > 0,

$\lim_{x \to +\infty} (x^n) = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x}) = +\infty$ $\lim_{x \to \infty} (\frac{1}{x^n}) = 0$ $\lim_{x \to 0} (\frac{1}{\sqrt{x}}) = 0$

2) Limites en -∞

Compléter

x	-10	-100	-1000	-10^{10}	-10^{20}
x^2	10 000	10^8	10^{20}	10^{40}	$+\infty$
x^3	-1 000 000	-10^{12}	-10^{30}	-10^{60}	$-\infty$
$\frac{1}{x}$	-0,01	-0,00001	-10^{-10}	-10^{-20}	0-
$\frac{1}{x^2}$	0,0001	10^{-8}	10^{-20}	10^{-40}	0+

Résumé :

Soit n entier > 0

$\lim_{x \to -\infty} (x^{2n}) = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} (x^{(2n-1)}) = -\infty$

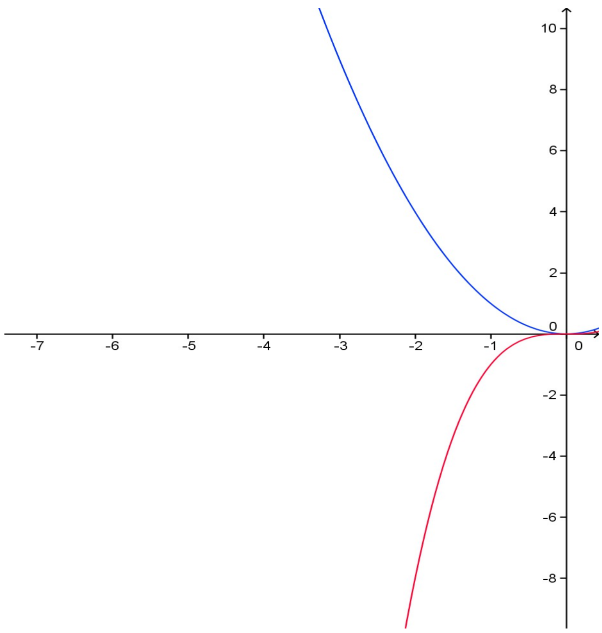
$\lim_{x \to -\infty} (\frac{1}{x^n}) = 0$

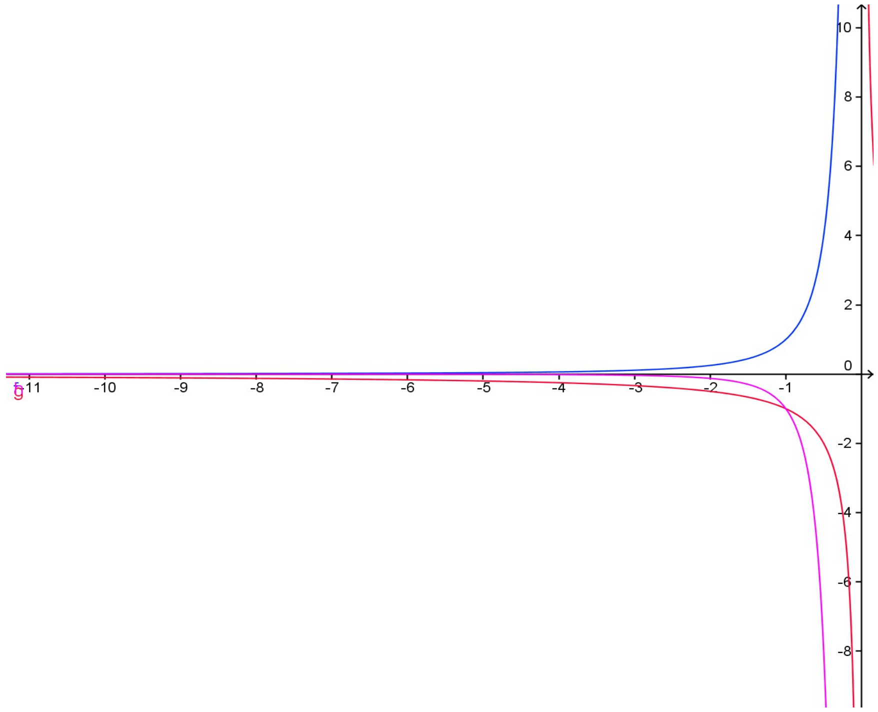
3) Limites en zéro

f(x) = x^n est définie en x = 0 et f(0) = 0: on a aussi $\lim_{x \to 0} x^n = 0$.

De même pour f(x) = $\sqrt{x}$.

a) f(x) = $\frac{1}{x^n}$: non définies pour x = 0.





Il faut distinguer les x > 0 et les x < 0, car lorsque n est impair, la fonction change de signe en passant le zéro !
On aura donc (en se référant aux courbes de fonctions ci-dessus), pour n entier > 0 :

$$\lim_{x \to 0+} \left(\frac{1}{x^{2n-1}}\right) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0-} \left(\frac{1}{x^{2n-1}}\right) = -\infty$$

<u>Remarque :</u>

on note x → 0+ pour dire x → 0 avec x > 0, et x → 0- pour dire x → 0 avec x < 0.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^{2n}}\right) = +\infty$$

27/09/07

4) Limite lorsque x tend vers x_0

<u>Important :</u>

<u>Pour toutes les fonctions habituelles</u>, si on prend un nombre x_0 appartenant au domaine de définition de ces fonctions, on aura :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Lorsque c'est vrai pour tout x_0, on dit que la fonction f est "continue".

Graphiquement, cela correspond au fait qu'"on ne lève pas le crayon" quand on trace la courbe (le trait est continu).

24/09/08

<u>Exemples :</u>

Lorsque la fonction f n'est pas définie en x_0, on peut étudier sa limite de la façon suivante :
On pose $x = x_0 + h$, et on fait tendre h vers zéro.

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$. *(f n'est donc pas définie pour x = 3)*

On pose x = 3 + h, on a f(x) = $\frac{1}{3+h-3} = \frac{1}{h}$.

Il suffit alors de se reporter aux limites déjà étudiées en 0 de la fonction $\frac{1}{x}$.

Notation : par analogie avec le zéro, on notera x → 3- quand x < 3 et x → 3+ quand x > 3.

5) Tableau récapitulatif des limites des fonctions usuelles

x	-∞	0-	0+	+∞
$\sqrt{x}$	X	X	0+	+∞
x^2	+∞	0+	0+	+∞
x^3	-∞	0-	0+	+∞
$\frac{1}{x}$	0-	-∞	+∞	0+
$\frac{1}{x^2}$	0+	+∞	+∞	0+

C) Limites et opérations

1) Limite d'une somme

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	a	+∞	-∞	+∞	-∞	+∞
$\lim_{x\to x_0} g(x)$	b	b	b	+∞	-∞	-∞
$\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x))$	a + b	+∞	-∞	+∞	-∞	?

Résumé mnémotechnique :

a + b = a + b   +∞ + b = +∞   -∞ + b = -∞

+∞ + +∞ = +∞   -∞ + -∞ = -∞   +∞ + -∞ = ?

Cas particulier :

Somme d'une fonction f et d'une constante a = comme la somme d'une fonction de limite a et de la fonction f.

Exemples :

a) $f(x)=5+\frac{1}{x}$ Trouver $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b) $f(x)=x^4+3-\frac{1}{x}$ Trouver $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

c) $f(x)=\frac{1}{x^3}-x^8$ Trouver $\lim_{x\to 0-} f(x)$

d) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ Trouver $\lim_{x\to 0+} f(x)$

4/10/07

Résumé mnémotechnique :

a x b = a x b ∞ x b = ∞ si b#0 ∞ x ∞ = ∞ ∞ x 0 = ?

Le signe du produit dépendant des deux signes de la manière habituelle.

Cas particulier :

Produit d'une fonction f et d'une constante a = comme le produit d'une fonction de limite a et de la fonction f.

Exemples :

Trouver $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to 0+} f(x)$

a) $f(x)=x\left(3+\frac{1}{x}\right)$ b) $f(x)=x^2(x+3)$ c) $f(x)=\frac{x^5+1}{x^3}$

d) $f(x)=\frac{x^3+1}{x^5}$ e) $f(x)=x\sqrt{x}$ f) $f(x)=\left(3+\frac{1}{x}\right)\left(5-\frac{1}{x^2}\right)$

g) $f(x)=5-\frac{2}{x}$ h) $f(x)=(x^4+3x-7)\times\left(\frac{5}{x}\right)$ i) $f(x)=x\left(3-\frac{5}{x}\right)$

11/10/08

3) Limite de l'inverse d'une fonction

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	a ≠ 0	+∞	-∞	0 avec f > 0	0 avec f < 0	0 signe variable
$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x)}\right)$	$\frac{1}{a}$	0	0	+∞	-∞	Pas de limite

Résumé mnémotechnique :

$\frac{1}{\infty}=0$ $\frac{1}{0_+}=+\infty$ $\frac{1}{0_-}=-\infty$ $\frac{1}{0_{+-}}=$ **pas de limite**

Le signe du quotient dépendant des deux signes de la manière habituelle.

Exemples :

a) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ **Trouver** $\lim_{x\to 1-} f(x)$, $\lim_{x\to 1+} f(x)$ **et** $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

b) $f(x)=\frac{x+6}{2x-3}$ **Trouver** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ **et** $\lim_{x\to 0-} f(x)$

11/10/07 9/10/08

4) Limite d'un quotient

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	a	a	a	a	a	+∞	-∞	0	∞
$\lim_{x\to x_0} g(x)$	b ≠ 0	∞	0 > 0	0 < 0	0 signe variable	b	b	0	∞
$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}(x)\right)$	$\frac{a}{b}$	0	∞ signe de a	∞ signe de -a	*pas de limite*	∞ signe de b	∞ signe de -b	?	?

<u>Résumé mnémotechnique :</u>

$\frac{a}{\infty}=0$ $\frac{\infty}{b}=\infty$ $\frac{a}{0}=\infty$ *si* 0_+ *ou* 0_-, *pas de limite si* 0_{+-} $\frac{0}{0}=?$ $\frac{\infty}{\infty}=?$

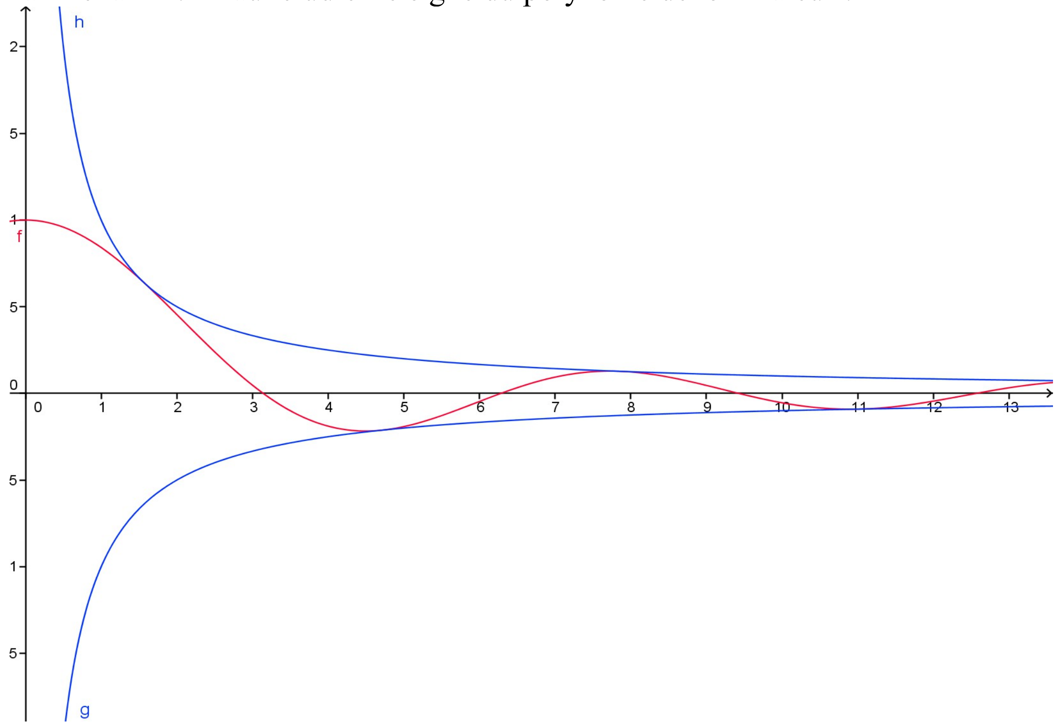
Le signe du quotient dépendant des deux signes de la manière habituelle.

<u>Exemples :</u>

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{a+\frac{1}{x}}{8-\frac{2}{x^2}}$ b) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{4x^2+x}{8x^2-2}$ c) $\lim_{x\to1} f(x)=\frac{2x+1}{-2x^2-x+3}$

<u>Note :</u>

Attention à 1- et à 1+ ! Il faut étudier le signe du polynôme dénominateur !



3/10/08

<u>5) Limite d'une fonction composée</u>

Soit f = u o v, autrement dit f(x) =u((v(x)) avec v définie sur un intervalle I et u définie sur un intervalle J et soit $a\in I$.

Si $\lim_{x\to+\infty} v(x)=b$ avec $b\in J$, et si $\lim_{x\to b} u(x)=c$, Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)=c$.

Ceci est vrai avec a, b et c dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}$.

<u>Exemples :</u>

a) $f(x)=\sqrt{1-x}$: trouver la limite quand x → -∞.

b) $f(x)=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x})$: trouver la limite quand x → +∞

c) $f(x)=\frac{1}{\sin(x)}$:limite quand x → 0+ (x → 0 et x > 0).

<u>D) Limites particulières</u>

1) Limites des fonctions polynômes

Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

Pour trouver la limite de P(x) à l'infini, on met $a_n x^n$ en facteur :

$$P(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + ... + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)$$

Dans cette expression, tous les termes en $\frac{a_i}{a_n x^{n-i}}$ tendent vers zéro, donc la limite du deuxième terme du produit est égale à 1.

Si $a_n > 0$, la limite de P(x) sera celle de x^n, et sinon ce sera la limite de $-x^n$.

En résumé :

La limite à l'infini d'un polynôme est égale à la limite à l'infini de son terme de plus haut degré.

Exemples :

Trouver les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de :

a) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2$

b) $f(x) = -6x^7 + 3x$

c) $f(x) = 4x^2 + 3x^3 + 7$

18/10/07

2) Limites des fonctions rationnelles

On utilise le même système, en mettant en facteur le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.

Soit $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}$

On fait $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ et on a :

$$N(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + ... + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) \text{ et } D(x) = b_m x^m \left(1 + \frac{b_{m-1}}{b_m x} + ... + \frac{b_1}{b_m x^{m-1}} + \frac{b_0}{b_m x^m}\right),$$

d'où :

$f(x) = \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \left(\frac{N_1(x)}{D_1(x)}\right)$ où $N_1(x)$ et $D_1(x)$ ont tous deux pour limite la valeur 1 à l'infini.

La limite de f(x) sera donc celle de $\frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$.

Soit, si $n > m$, la limite sera infinie avec un signe dépendant de x, de a_n et de b_m .

Si au contraire $n < m$, la limite sera zéro, et enfin si $n = m$, la limite sera le quotient $\frac{a_n}{b_m}$.

Exemples :

Trouver les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de :

a) $f(x) = \frac{x^5 - 3x^3 + x}{-5x^3 + 3x^2 + 1}$ b) $f(x) = \frac{-7x^7 + 2x - 1}{-3x^9 + 5x^7 + x^2}$ c) $f(x) = \frac{8x^3 - 2x^2 + 5x - 9}{-7x^3 + 7x^2 - x + 11}$

3) Limites et inégalités

Soient f, u et v trois fonctions définies sur $I=]a;+\infty[$

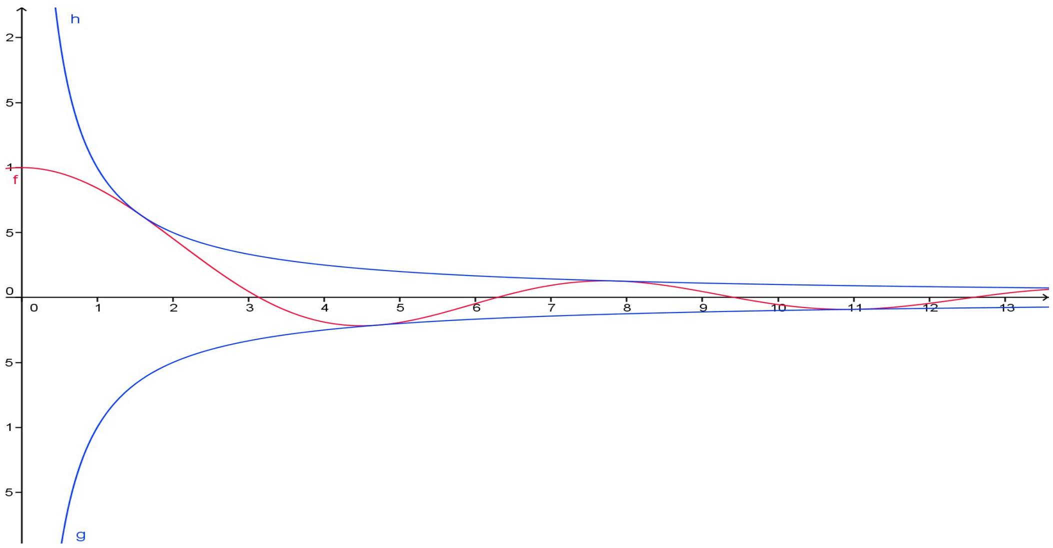
$Si \forall x \in I$	et	Alors
$u(x) \leq f(x) \leq v(x)$	$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} v(x) = L$	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$
$f(x) \geq u(x)$	$\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
$f(x) \leq v(x)$	$\lim_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
$\lvert f(x) - L \rvert \leq u(x)$	$\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$
$f(x) \leq v(x)$	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L'$	$L \leq L'$

Exemple :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

a) Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[,\ -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$.

b) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$.



E) Interprétation graphique des limites : asymptotes

1) Définitions

Une asymptote est une droite vers laquelle se rapproche une courbe jusqu'à l'infini.

Il y a trois sortes d'asymptotes : verticales, horizontales et obliques.

Les asymptotes verticales correspondent habituellement aux valeurs interdites (qui donnent une valeur nulle au dénominateur), et il peut y en avoir un nombre quelconque, ou même une infinité pour une fonction donnée.

Les asymptotes horizontales surviennent quand la fonction tend vers une valeur finie lorsque la variable tend vers l'infini. Il ne peut y en avoir que deux au maximum (en $+\infty$ et en $-\infty$).

Les asymptotes obliques correspondent aux cas où quand la variable tend vers l'infini, la courbe se rapproche d'une droite oblique, donc d'équation y = a x + b. Comme pour les horizontales, il ne peut y en avoir que deux au maximum (en +∞ et en -∞).

2) Asymptotes verticales : limite infinie pour x → a

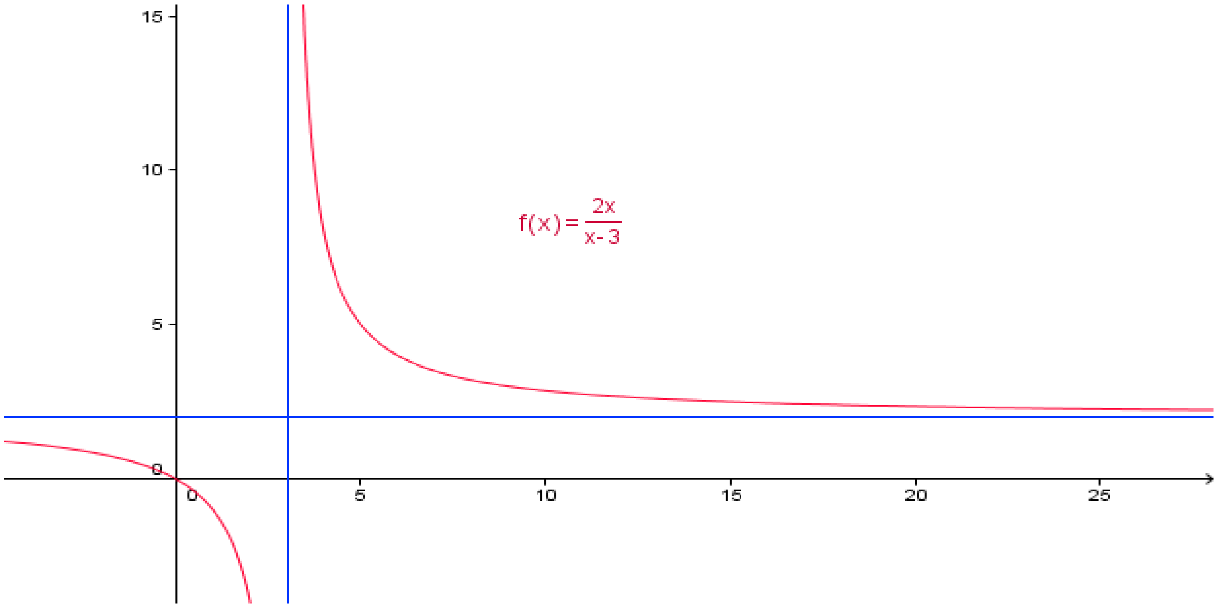
Si une fonction f définie sur]a ; b[admet une limite infinie en a (+∞ ou -∞), on dit que la droite d'équation x = a, parallèle à l'axe des ordonnées, est une asymptote à droite de f en a.

Si une fonction f définie sur]b ; a[admet une limite infinie en a (+∞ ou -∞), on dit que la droite d'équation x = a, parallèle à l'axe des ordonnées, est une asymptote à gauche de f en a.

En particulier, lorsqu'une fonction comporte un dénominateur qui s'annule lorsque x prend une certaine valeur a, a est une valeur interdite **et** il y a une asymptote verticale d'équation x = a.

Les **valeurs interdites** correspondent donc souvent à des asymptotes verticales.

Exemples :



Pour x = 3, f n'est pas définie, et la valeur interdite 3 correspond à une asymptote verticale d'équation x = 3.
(On a aussi ici une asymptote horizontale d'équation y = 2).

Autres exemples :

a) $f(x)=7+\dfrac{2}{x-7}$ *(asymptote verticale d'équation x = 7)*

b) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+7}{3x^2-2x-1}$ *(asymptote verticale d'équation x = 1)*

c) $f(x)=\dfrac{3x^2+x-1}{x+2}$ *(asymptote verticale d'équation x = -2)*

3) Asymptotes horizontales : limite finie b réelle quand x → +∞ ou x → -∞

Si une fonction f admet une limite b quand x → +∞ (resp. -∞), on dit que la droite d'équation y = b, parallèle à l'axe des abscisses, est une asymptote horizontale de f en +∞ (resp. -∞).

On peut reprendre l'exemple précédent : la droite d'équation y = 2 est asymptote de la fonction f(x) en +∞ et en -∞.

En effet, $\frac{2x}{x-3}-2=\frac{2x-2(x-3)}{x-3}=\frac{3}{x-3}\to 0$ **quand** $x\to+\infty$ **ou** $-\infty$, autrement dit la distance entre la courbe de f et la droite y = 2 tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini.

Autres exemples :

$f(x)=7+\frac{2}{x}$ asymptote horizontale d'équation y = 7

$f(x)=\frac{x^2-3x+7}{3x^2-x+1}$ asymptote horizontale d'équation y = 1/3

4) Asymptotes obliques : f(x) – (a x + b) → 0 quand x → +∞ ou x → -∞

Prenons la droite d'équation y = 4x – 1.

La fonction $f(x)=4x-1+\frac{3}{x}$ admet cette droite comme asymptote oblique en +∞ et en -∞.

En effet, la différence f(x) – (4x + 1) tend vers zéro quand x → +∞ et quand x → -∞. La courbe de f(x) se rapprochera donc indéfiniment de cette droite en +∞ et en -∞.

Autres exemples :

$f(x)=2x+7+\frac{2}{x}$ asymptote oblique d'équation y = 2 x + 7

$f(x)=\frac{x^2-3x+7}{x+1}$ asymptote oblique d'équation y = x - 4

5) Résumé : recherche des asymptotes

Le tableau suivant résume le lien entre limites et asymptotes :

Si	Alors, on a une asymptote
$\lim\limits_{x\to a}(f(x))=+\infty$ **ou** $-\infty$	verticale d'équation $x=a$
$\lim\limits_{x\to+\infty \text{ ou } -\infty}(f(x))=b$	horizontale en +∞ ou en -∞ d'équation $y=b$
$\lim\limits_{x\to+\infty \text{ ou } -\infty}(f(x)-(ax+b))=0$	oblique en +∞ ou en -∞ d'équation $y=ax+b$

6) Courbes asymptotes

De façon générale, quand deux courbes se rapprochent indéfiniment en une valeur de x ou à l'infini, on dit qu'elles sont asymptotes l'une de l'autre.

Plus précisément, y = g(x) est asymptote de y = f(x) lorsque f(x) – g(x) → 0 quand x → +∞ ou -∞.

L'asymptote servant en principe à mieux cerner l'allure de la courbe à l'infini, on appelle asymptote de l'autre la courbe d'équation la plus simple.

Exemples :

a) $f(x)=x^2$ *et* $g(x)=x^2+\frac{5}{x}$

f(x) – g(x) = 5/x → 0 quand x → +∞ et quand x → -∞.
La courbe y = x² est donc une courbe asymptote de y = x² + 5/x.

b) $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}$ et $g(x)=\frac{1}{x}$

La courbe d'équation y = g(x) est asymptote de celle d'équation y = f(x), car f(x) – g(x) → 0 quand x → +∞ et quand x → -∞.

Remarque : ces deux courbes ont aussi comme asymptote à l'infini l'axe des abscisses, qui est la droite d'équation y=0.

7) Position d'une courbe par rapport à son asymptote

Il est intéressant aussi de connaître la position de la courbe par rapport à son asymptote (au-dessus ou au-dessous), donc d'étudier le signe de f(x) – b pour les asymptotes horizontales, f(x) – (a x + b) pour les asymptotes obliques ou f(x) – g(x) pour les asymptotes courbes.

Lorsqu'on a f(x) – c (ou f(x) – (ax + b) etc...) positif, la courbe de f est au-dessus, si c'est négatif la courbe est au-dessous.

Remarquons qu'il y a aussi le cas où la courbe oscille entre dessus et dessous, lorsque le signe change indéfiniment.

a) Exemples

Déterminer si f est au-dessus ou au-dessous de son asymptote dans les cas suivants :

$f(x)=3+\frac{1}{x}$ (y = 3) pour x → -∞ ou x → +∞

$f(x)=4-\frac{2}{\sqrt{x}}$ (y = 4) pour x → +∞

$f(x)=\frac{2x^2-3\sin(\frac{1}{x})}{x^2-1}$ (y = 2) pour x → -∞ ou x → +∞

F) Résolution des cas de limite «indéterminée»

On a vu pour les polynômes qu'une forme « indéterminée » pour la règle de la somme, par exemple x^2 - x pour x → +∞ se résout facilement par la mise en facteur de x^2 suivie de la règle du produit.

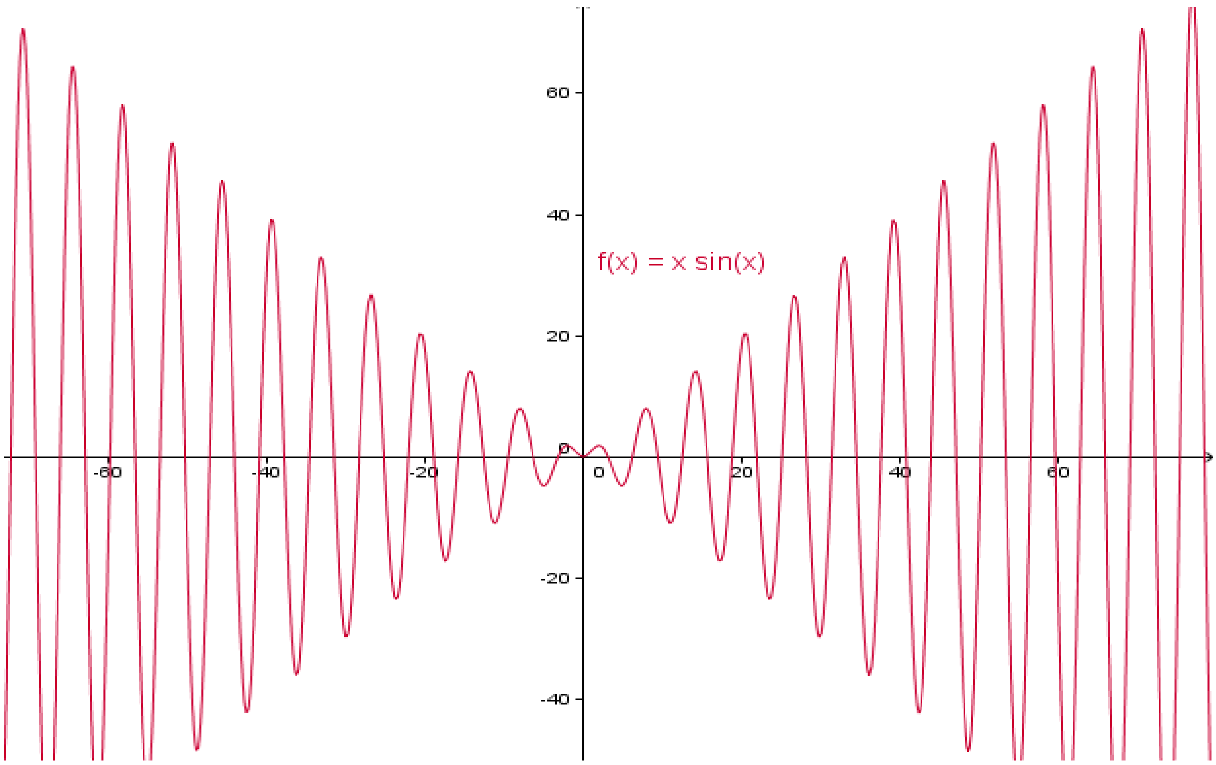
On a vu aussi une façon de résoudre des formes indéterminées de quotient pour les fractions rationnelles.

Parfois, cependant, on ne peut pas trouver de limite parce qu'il n'y en a pas !

Il n'y a pas de règle générale pour savoir si la limite existe et pour la trouver, mais des techniques comme la mise en facteur, l'utilisation de fonctions composées et l'encadrement par des fonctions de limites connues permettent généralement d'y arriver.

Il existe des moyens plus puissants pour le faire mais pas au programme de cette classe (développements limités).

Exemples :



sin(x) garde une valeur absolue inférieure à 1, <u>mais change de signe indéfiniment!</u>

f(x) va osciller entre -x et +x jusqu'au bout, donc f(x) ,<u>n'admet pas de limite</u> en $x \to +\infty$ ni en $-\infty$.

Limites : Fiche de révision page 1/2

Résumé mnémotechnique (opérations entre limites)

a + b = a + b $\quad +\infty$ **+ b =** $+\infty$ $\quad -\infty$ **+ b =** $-\infty$

$+\infty + (+\infty) = +\infty$ $\quad -\infty + (-\infty) = -\infty$ $\quad +\infty + (-\infty) = ???$

a x b = a x b $\quad$ ***Si b # 0 :*** ∞ **x b =** ∞ ***et le signe suit la règle habituelle.***

∞ **x 0 = ???** $\quad \infty$ **x** $\infty = \infty$ ***et le signe suit la règle habituelle.***

$\frac{a}{\infty}=0$ $\quad \frac{\infty}{a}=\infty$ ***et le signe suit la règle habituelle.*** $\frac{\infty}{\infty} = ???$ ***et*** $\frac{0}{0} = ???$

Si a # 0 : $\frac{a}{0_+}=\infty$ ***signe de a*** $\quad \frac{a}{0_-}=\infty$ ***signe de -a*** $\quad \frac{a}{0_{+-}}=$ ***pas de limite !***

Limites et inégalités

Si pour tout x assez grand	*et*	*Alors*
$u(x)\leq f(x)\leq v(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=L$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$
$f(x)\geq u(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
$f(x)\leq v(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
$\lvert f(x)-L\rvert\leq u(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$
$f(x)\leq v(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L'$	$L\leq L'$

Recherche des asymptotes

Si	*Alors, on a une asymptote*
$\lim\limits_{x\to a}(f(x))=+\infty \text{ ou } -\infty$	verticale d'équation $x=a$
$\lim\limits_{x\to+\infty \text{ ou } -\infty}(f(x))=b$	horizontale en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'équation $y=b$
$\lim\limits_{x\to+\infty \text{ ou } -\infty}(f(x)-(ax+b))=0$	oblique en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'équation $y=ax+b$

Limites si x → ∞ des polynômes et des fonctions rationnelles

On tient alors seulement compte des termes de plus haut degré

Limites indéterminées

On essaye de factoriser ou d'utiliser les inégalités pour lever l'indétermination

Limites : Fiche de révision page 2/2

Tableau récapitulatif des limites des fonctions usuelles

x	-∞	0-	0+	+∞
$\sqrt{x}$	Ø	Ø	0+	+∞
x^2	+∞	0+	0+	+∞
x^3	-∞	0-	0+	+∞
$\frac{1}{x}$	0-	-∞	+∞	0+
$\frac{1}{x^2}$	0+	+∞	+∞	0+

Limite d'une somme

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	a	+∞	-∞	+∞	-∞	+∞
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	b	b	b	+∞	-∞	-∞
$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)+g(x))$	a + b	+∞	-∞	+∞	-∞	?

Limite d'un produit

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	a	a > 0	a < 0	a > 0	a < 0	+∞	+∞	-∞	0
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	b	+∞	+∞	-∞	-∞	+∞	-∞	-∞	+∞ ou -∞
$\lim\limits_{x \to x_0} (fg(x))$	ab	+∞	-∞	-∞	+∞	+∞	-∞	+∞	?

Limite d'un inverse

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	a ≠ 0	+∞	-∞	0 avec f > 0	0 avec f < 0	0 signe variable
$\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{1}{f(x)}\right)$	$\frac{1}{a}$	0	0	+∞	-∞	Pas de limite

Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	a	a	a	a	a	+∞	-∞	0	∞
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	b ≠ 0	∞	0_+ (> 0)	0_- (< 0)	0_{+-} (signe variable)	b	b	0	∞
$\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\frac{a}{b}$	0	∞ signe de a	∞ signe de -a	*pas de limite*	∞ signe de b	∞ signe de -b	?	?