Chapitre 4 – Les primitives

A) Introduction : la loi de la gravité

Depuis Newton, on sait que les pommes (et les urus) tombent des arbres parce qu'ils sont attirés par la terre (la planète, pas l'humus).

A une altitude donnée, cette force induit une accélération constante aux objets qui tombent.
Comment, à partir de cette accélération (appelée g et de valeur à peu près égale à 9,81m/s² à la surface de la terre), peut-on retrouver la formule donnant la vitesse d'un objet en chute libre ?

On a a(t) = g, on voudrait trouver v(t)…
On sait que a(t) = v'(t), dérivée de la vitesse.

Le chemin inverse de la dérivation, trouver une fonction F dont f est la dérivée, s'appelle la recherche de primitives.

Dans le tableau des dérivées usuelles, on voit que f(x) = a x est la seule qui donne une dérivée constante, a.

Une primitive possible de a(t) = g est donc A(t) = g t (qui donne A'(t) = g).
Y en a-t-il d'autres ?

Soit F(t) telles que F'(t) = g et examinons la fonction f(t) = F(t) – A(t) : sa dérivée est par conséquent f'(t) = F'(t) – A'(t) = g – g = 0

La dérivée de f' est nulle pour tout t, cela veut dire qu'en tout point de sa courbe, la tangente à cette courbe, donc sa "pente instantanée" est horizontale.
La seule solution possible est une droite horizontale, soit une droite d'équation y = c.

La fonction correspondante est donc du type f(x) = c !

On a ainsi démontré que s'il y a plusieurs primitives d'une fonction, elles sont identiques, à une constante additive c près.

De façon réciproque, il est immédiat que toute somme d'une constante et d'une primitive de f(x) est aussi primitive de f(x).

On arrive donc ici à une vitesse de la forme v(t) = g t + c. Cependant, l'accélération est orientée vers le bas, donc pour être cohérent, on notera v(t) = - g t + c.

Si on connaît la vitesse à l'instant t = 0 (par exemple une pierre qu'on lâche à l'instant 0), et qu'on la nomme v_0, on aura $v(t) = v_0 - g\,t$, puisque $v(0) = v_0 = 0 + c$ ce qui implique $c = v_0$. D'où : $\boxed{v(t)=-g\,t+v_0}$

Pour remonter enfin à l'altitude, on refait la même opération : dans le tableau on voit que pour une dérivée de type k t, il faut utiliser k t² / 2. Quant à v(t), sa primitive sera donc $-g\,t^2/2 + v_0\,t$, et en ajoutant une constante h_0, on trouve :

$h(t) = -g\,t^2/2 + v_0\,t + h_0$ ou : $\boxed{h(t)=-\frac{1}{2}g\,t^2+v_0\,t+h_0}$

On retrouve bien ici la formule de la hauteur h parcourue lors d'une chute libre.

Remarquons que h_0 sera ici l'altitude à l'instant zéro.

Le même cheminement se fait couramment en physique, parce que les lois de la physique portent le plus souvent sur des dérivées de grandeurs.

Exemple :

En électricité, avec un condensateur "parfait" on a $\boxed{\mathbf{i(t)=C\frac{du(t)}{dt}}}$.

B) Définition et propriété

1) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On appelle primitive F de f sur I, toute fonction dont la dérivée sur I est f.

2) Théorème

Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$ et $F_0(x)$ une fonction primitive de f sur I.
Alors, l'ensemble des fonctions primitives de f sur I sera l'ensemble des fonctions de la forme $\mathbf{F(x)=F_0(x)+c}$ avec c constante de $\mathbb{R}$.

C) Recherche des primitives d'une fonction

1) En inversant le tableau des dérivées usuelles, on obtient :

Fonction définie sur	Fonction	Primitive	Primitive définie sur
$\mathbb{R}$	$f(x)=0$	$F(x)=c$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$f(x)=a$, $a \neq 0$	$F(x)=ax+c$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$f(x)=a\,x^n$	$F(x)=a\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=\frac{-1}{x}+c$	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f(x)=\frac{1}{x^n}$, n>1	$F(x)=\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
$]0;+\infty]$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}+c$	$[0;+\infty]$
$\mathbb{R}$	$f(x)=\cos(x)$	$F(x)=\sin(x)+c$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$f(x)=\sin(x)$	$F(x)=-\cos(x)+c$	$\mathbb{R}$
$]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$	$f(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$	$F(x)=\tan(x)+c$	$]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

Exemples

Trouver les primitives de :

a) $f(x) = x^{17}$

b) $f(x)=\frac{1}{x^4}$

c) $f(x) = \sin(x)$

d) $f(x) = \cos(x)$

Cas spécial :

On a vu dans le tableau que pour $\frac{1}{x^n}$, il faut avoir $n > 1$: on verra dans la chapitre sur les logarithmes que **la primitive de $\frac{1}{x}$ est ln(x), logarithme népérien de x**.

2) Opérations sur les primitives

a) Produit par une constante

Si la primitive de f(x) est F(x) + c, celle de k f(x) sera k F(x) + c.

Remarquons qu'il est inutile de multiplier le c par k.

Exemples :

Primitives de :

. $f(x) = 5x$ $\qquad F(x)=5\frac{x^2}{5}+c$

. $f(x) = 4x^5$ $\qquad F(x)=4\frac{x^6}{6}+c=2\frac{x^6}{3}+c$

. $f(x) = 3\sin(x)$ $\qquad F(x) = -3\cos(x) + c$

b) Somme de deux fonctions

De même que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées ((u + v)' = u' + v'), les primitives d'une somme sont les sommes des primitives on ne mettra qu'une fois le "+ c").

Exemples :

Primitives de :

I) $3x^2 + 2x + 1$ $\qquad x^3 + x^2 + x + c$

II) $5x-\frac{1}{x^4}$ $\qquad 5\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3x^3}+c$

III) $3-\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad 3x-2\sqrt{x}+c$

IV) $6x - \cos x$ $\qquad 3x^2 - \sin x + c$

V) $\cos x - x^{17}$ $\qquad \sin x-\frac{x^{18}}{18}+c$

c) Primitives et fonctions composées

En partant de la formule générale qui donne comme dérivée de u(v(x)) la fonction v'(x) × u'(v(x)), donc de la primitive de v' u'(v) qui est u(v) + c, on trouve les cas particuliers importants suivants :

Fonction f(x) =	Primitive F(x) =
u'(ax + b)	$\frac{1}{a}\ u(ax+b)+c$
sin(ax + b)	$\frac{1}{a}\ \cos(ax+b)+c$
cos(ax + b)	$\frac{-1}{a}\ \sin(ax+b)+c$
$u'(x)\ (u(x))^n$	$\frac{(u(x))^{n+1}}{n+1}+c$
$\frac{u'(x)}{(u(x))^n}$ n > 1	$\frac{-1}{(n-1)(u(x))^{n-1}}+c$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}+c$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	ln(u(x)) + c
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{\ln(ax+b)}{a}+c$

<u>Exemples</u>

I) sin (3x + 2) $\qquad -\frac{\cos(3x+2)}{3}+c$

II) $5(5x-2)^2$ $\qquad \frac{(5x-2)^3}{3}+c$

III) $\sin(x)\cos^3(x)$ $\qquad -\frac{\cos^4(x)}{4}+c$

IV) $\frac{\tan(x)}{\cos(x)}$ $\qquad \frac{1}{\cos(x)}+c$

V) $\frac{2x+5}{\sqrt{x^2+5x-2}}$ $\qquad 2\sqrt{x^2+5x-2}+c$

VI) $\frac{3}{2x-1}$ $\qquad \frac{3}{2}\ln(2x-1)+c$

<u>d) Primitive prenant une valeur donnée en un point</u>

Soit une fonction f, dérivable sur I, un nombre x_0 de I et un réel y_0.

<u>Théorème :</u>

Il existe une unique fonction F_0 qui soit primitive de f et prenne la valeur y_0 en x_0 ($F_0(x_0) = y_0$).

En pratique, soit F la forme générale des primitives de f, soit $F(x) = F_1(x) + c$, pour trouver F_0 telle que $F_0(x_0) = y_0$ et $F_0'(x) = f(x)$, on fait :

$F_0(x) = F_1(x) + c$ et $F_0(x_0) = y_0 = F_1(x_0) + c$, donc $\qquad$ $\mathbf{c = y_0 - F_1(x_0)}$

<u>Exemple :</u>

$F(x) = 2x^2 - 3x + 2$

Trouver la primitive de f prenant la valeur 17 pour x = 6

Solution :

$$F(x)=2\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+2x+c$$

et F(6) = 144 – 54 + 12 + c = 17 d'où c = - 85

$$F(x)=2\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+2x-85$$

3) Recherche de primitives

a) Faisabilité

On ne peut pas toujours trouver facilement les primitives d'une fonction, en particulier quand on a affaire à des produits ou des quotients.

Parfois, on peut y arriver avec les tableaux ci-dessus, parfois ce n'est pas suffisant. Dans certains cas, on peut alors y arriver en changeant la forme de la fonction.

Nous allons étudier quelques cas de ce genre.

b) Polynômes trigonométriques

On a les formules $\cos^2(x)=\frac{1+\cos(x)}{2}$ et $\sin^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}$.

Plus généralement, les formules de Moivre permettent de "linéariser" les puissances des sinus et cosinus, c'est à dire à faire disparaître ces puissances en utilisant des combinaisons de sin(nx) et cos(nx).

On peut donc transformer toutes les puissances de cos(x) et sin(x) en sinus ou cosinus de multiples de x, plus faciles à intégrer, c'est à dire qu'il est plus facile d'en trouver les primitives.

Exemples :

1) $f(x) = 6\sin^2 x$ $\quad$ $f(x) = 3 - 3\cos(2x)$ d'où $F(x)=3x+\frac{3}{2}\sin(2x)+c$

2) $f(x) = 4\cos^4 x$ $\quad$ $f(x) = 2(1 + \cos(2x))^2 = 2 + 4\cos 2x + 2\cos^2(2x)$

$f(x) = 2 + 4\cos(2x) + 1 + \cos(4x) = 3 + 4\cos(2x) + \cos(4x)$

$$F(x)=3x+2\sin(2x)+\frac{\sin(4x)}{4}+c$$

Remarque :

Pour les puissances impaires, on peut aussi utiliser $u' u^n$ en se servant de $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Exemple :

$f(x) = \sin^3(x) + 3\sin^5(x)$
$f(x) = \sin(x)(1 - \cos^2(x)) + 3\sin(x)(1 - \cos^2(x))^2$
$f(x) = \sin(x) - \sin(x)\cos^2(x) + 3\sin(x)(1 - 2\cos^2(x) + \cos^4(x))$
$f(x) = 4\sin(x) - 7\sin(x)\cos^2(x) + 3\sin(x)\cos^4(x)$

D'où cette fois la primitive :

$$F(x)=-4\cos(x)+\frac{7\cos^3(x)}{3}-\frac{3\cos^5(x)}{5}+c$$

c) Avec les formules du tableau des fonctions composées

Quand on peut faire apparaître $u' u^n$, $\frac{u'}{u^n}$, $\frac{u'}{u}$ et $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, on peut trouver des primitives.

Exemple :

Trouver les primitives des fonctions suivantes :

I) $f(x) = (x + 1)(3x^2 + 6x - 7)^2$ $\quad$ $F(x)=\dfrac{(3x^2+6x-7)^3}{18}+c$

II) $f(x) = (10x^4 + 6)(x^5 + 3x + 1)$ $\quad$ $F(x) = (x^4 + 3x + 1)^2 + c$

III) $f(x) = \sin(x)\cos^7(x)$ $\quad$ $F(x)=\dfrac{-\cos^8(x)}{8}+c$

IV) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x^4+2)^3}$ $\quad$ $F(x)=\dfrac{-1}{8(x^4+2)^2}+c$

V) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ $\quad$ $F(x)=-\sqrt{4-x^2}+c$

VI) $f(x)=\dfrac{10x^4+6}{x^5+3x-2}$ $\quad$ $F(x)=2\ln(x^5+3x-2)+c$

d) Fonctions rationnelles

Il existe un moyen général de transformer les fonctions rationnelles de façon à pouvoir en trouver les primitives. Nous ne parlerons ici que de quelques cas simples.

1er cas : $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

Soir par exemple $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$

On aura $f(x)=\dfrac{2x+4-7}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-7}{x+1}=2-\dfrac{7}{x+1}$

D'où la primitive qui sera :
$F(x) = 2x - 7\ln(x + 1) + c$

Exemple :

Trouver la primitive de $f(x)=\dfrac{4x+6}{2x-1}$

On aura $f(x)=\dfrac{4x-2+8}{2x-1}=\dfrac{2(2x-1)-8}{2x-1}=2-\dfrac{8}{2x-1}$

On trouve donc finalement $F(x)=2x-8\dfrac{\ln(2x-1)}{2}+c=2x-4\ln(2x-1)+c$

2ème cas : $\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$

On sait qu'on peut toujours mettre ce genre de fonction sous la forme $f(x)=a'x+b'+\dfrac{c'}{dx+e}$.

On procède soit par division polynomiale, soit par identification des numérateurs en écrivant f(x) sous ses deux formes et en réduisant au même dénominateur.
Le passage à la primitive est alors aisé.

Exemple :

Trouver la forme générale des primitives de $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+3}{x+1}$

On trouve d'abord $f(x)=2x+\dfrac{-9x+3}{x+1}=2x-9+\dfrac{12}{x+1}$

Et on en déduit facilement la primitive générale :
$F(x) = x^2 - 9x + 12\ln(x + 1) + c$

Les primitives – Fiche de révision

Primitives des fonctions usuelles

f(x) définie sur	Fonction f(x) =	Primitive F(x) =	F(x) définie sur
$\mathbb{R}$	0	c	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$a \quad (avec \quad a \neq 0)$	$ax+c$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$a\,x^n$	$\frac{a\,x^{n+1}}{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{a}{x^2}$	$\frac{-a}{x}+c$	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{a}{x^n}$ avec $n>1$	$\frac{-a}{(n-1)\,x^{n-1}}+c$	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$]0;+\infty]$	$\frac{a}{\sqrt{x}}$	$2\,a\sqrt{x}+c$	$[0;+\infty]$
$\mathbb{R}$	$a\cos(x)$	$a\sin(x)+c$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$a\sin(x)$	$-a\cos(x)+c$	$\mathbb{R}$
$]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$	$\frac{a}{\cos^2(x)} \; = \; 1+\tan^2(x)$	$a\tan(x)+c$	$]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

Primitives de fonctions composées

Fonction f(x) = u' v'(u)	Primitive F(x) = v(u)
$\sin(a\,x+b)$	$-\frac{1}{a}\;\cos(a\,x+b)+c$
$\cos(a\,x+b)$	$\frac{1}{a}\;\sin(a\,x+b)+c$
$u'(x)\;(u(x))^n$	$\frac{(u(x))^{n+1}}{n+1}+c$
$\frac{u'(x)}{(u(x))^n}$ (pour n > 1)	$\frac{-1}{(n-1)(u(x))^{n-1}}+c$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}+c$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(u(x))+c$
$\frac{1}{a\,x+b}$	$\frac{\ln(a\,x+b)}{a}+c$