Chapitre 5 – Le logarithme néperien

A) La fonction ln(x)

1) Définition

Nous avons vu que nous ne savions pas exprimer la primitive de la fonction inverse avec des fonctions connues.
Alors inventons cette fonction (on en a le droit grâce au théorème d'existence de primitive, la fonction inverse étant continue et dérivable sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$. D'où la définition suivante :

On appelle logarithme Népérien et on note ln(x) la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ qui admet la fonction inverse comme fonction dérivée sur cet intervalle et qui s'annule pour $x = 1$.

2) Propriétés

a) Croissance

La dérivée de ln(x) étant $1/x$ sur $]0 ; +\infty[$, cette dérivée est toujours strictement positive sur l'intervalle et donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Par conséquent, **si deux nombres positifs a et b vérifient l'équation ln(a) = ln(b), alors a = b.**

Exemples d'application :

I) Soit $x > 0$ avec $\ln x = \ln 3$
Quelle est la valeur de x ?

II) Soit $x > 0$ tel que $\ln(x^2 - 5) = \ln 4$
Que vaut x ?

b) Logarithme d'un produit

Soit a un réel > 0, et soit $g(x) = \ln(ax)$

La dérivée de g(x) sera $g'(x) = a.(1/ax) = 1/x$

G(x) est donc aussi une primitive de $1/x$, d'où $g(x) = \ln(x) + c$

Or $\ln(1) = 0$ par définition donc $g(1) = c$ soit $\ln(a) = c$, autrement dit $c = \ln(a)$!

On a donc $\ln(ax) = \ln(x) + \ln(a)$ et ceci est vrai pour tous a et x réels positifs, soit

Pour tous a et b réels positifs, ln(ab) = ln(a) + ln(b)

On peut dire que "**Le logarithme transforme le produit en addition"**

Exemples :

a) $\ln(2x) = \ln 2 + \ln(x)$

b) $\ln(x^2) = \ln x + \ln x = 2 \ln x$

c) $\ln(4x^5) = \ln 4 + 5 \ln(x)$

d) Résoudre $\ln(x) + \ln 3 = \ln 5$

($x = 5/3$)

e) Résoudre $3\ln x = \ln 9 + \ln 3$
($x = 3$)

f) Avec la calculatrice : calculer ln16, diviser par 2 puis comparer avec ln4 puis rediviser par 2 et comparer à ln2.

g) Refaire de même avec ln27 en divisant par 3 et comparer à ln3 ($27 = 3^3$ $16 = 4^2$ $4 = 2^2$)

c) Logarithme d'un quotient ou d'un inverse

Soit $x > 0$. On sait que $\ln(1) = 0$.

$\ln(x/x) = \ln(1) = 0$ et $\ln(x/x) = \ln(x * (1/x)) = \ln(x) + \ln(1/x)$

Donc, $\mathbf{\ln(1/x) = - \ln(x)}$

De même, $\ln(x/y) = \ln(x \,.\, (1/y)) = \ln(x) + \ln(1/y) = \ln(x) - \ln(y)$

$\mathbf{\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)}$

"Le logarithme transforme la division en soustraction"

Exemples :

a) Résoudre $\ln(x/4) = 2\ln(2) + - \ln(x)$

($x/4 = 4/x$, soit $x^2 = 16$, d'où $x = 4$ ou -4 mais -4 impossible car x doit être positif, donc $x = 4$!)

d) Logarithme d'une puissance ou d'une racine carrée

$\ln(x^n) = \ln(x) + \ln(x) + \ln(x) + \ldots + \ln(x) = n * \ln(x)$, soit $\mathbf{\ln(x^n) = n \ln(x)}$

$\ln(x) = \ln(\sqrt{x} * \sqrt{x}) = \ln(\sqrt{x}) + \ln(\sqrt{x}) = 2 \ln(\sqrt{x})$, soit $\mathbf{\ln(\sqrt{x}) = \ln(x) / 2}$

Exemples :

. Résoudre $\ln x = 4 \ln 3$
. Résoudre $2 \ln (x + 1) = \ln (1 - x)$
  (x dans $]-1 ; +1[$ pour que ce soit possible)
  $(x + 1)^2 = 1 - x$ soit $x^2 + x = 0 = x (x + 1)$
  Donc $x = 0$ (car $x = -1$ impossible)

B) Étude de la fonction ln(x)

1) Ensemble de définition

Par définition de ln, c'est $]0 ; +\infty[$.

2) Tableau de variation

a) Signe de la dérivée

f'(x) = 1/x donc toujours positive

Donc la fonction logarithme est toujours croissante.

b) Limites aux bornes de l'intervalle

On a $\ln(10^n) = n \ln(10)$ et $\ln(10) > \ln(1) = 0$ (car ln est croissante et 10 > 1).

Lorsque $x \to +\infty$, il devient plus grand que tout 10^n donné, donc son logarithme devient plus grand que tout produit n * ln(10), or ceci tend vers l'infini lorsque n aussi.

Donc, ln(x) tend vers l'infini lorsque $x \to +\infty$. On peut alors écrire :

$$\lim_{x \to +\infty} (\ln(x)) = +\infty$$

Examinons maintenant le cas ou $x \to 0$: si l'on pose X = 1/x, on aura $X \to +\infty$.

Or, ln(x) = ln(1/X) = - ln(X) : donc ln(x) va tendre vers moins l'infini, puisque $\ln(X) \to +\infty$! On aura donc :

$$\lim_{x \to 0} (\ln(x)) = -\infty$$

c) Valeurs remarquables

Par définition, on a posé ln(1) = 0.

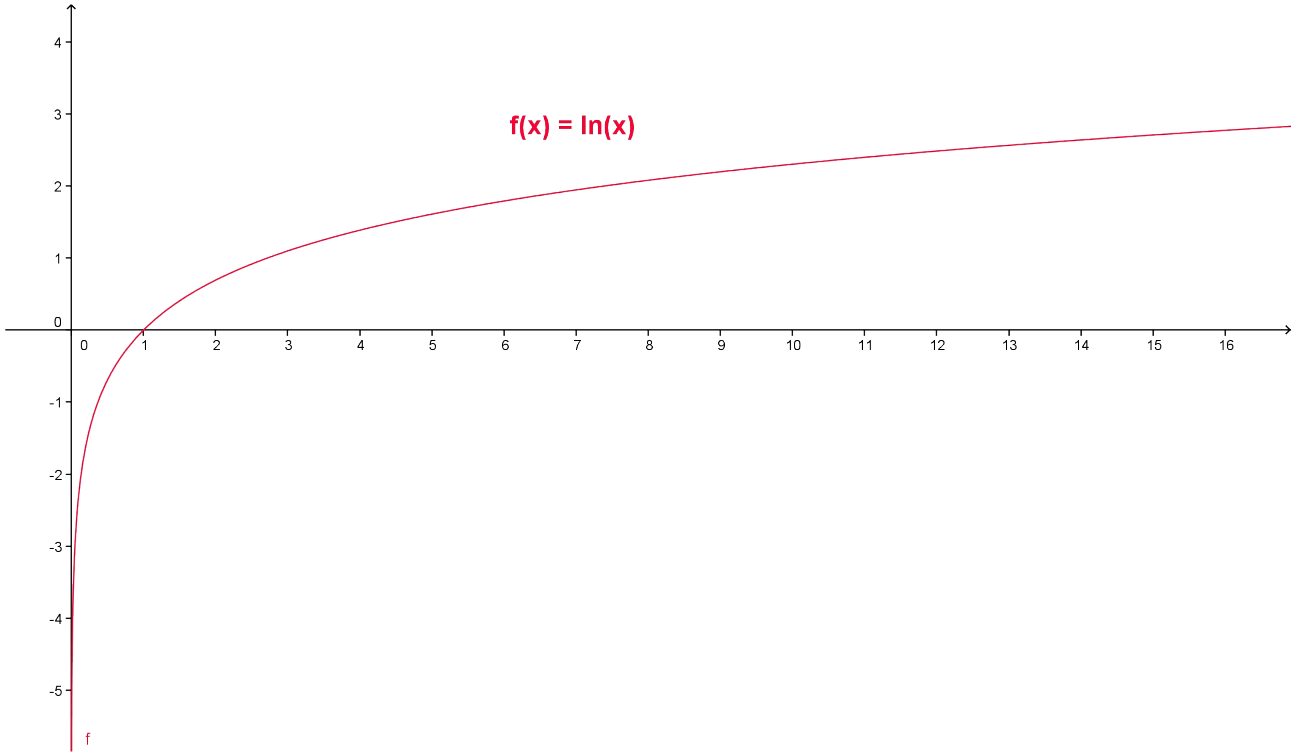
On appellera e le réel (unique d'après le A2a) tel que ln(e) = 1.

Une valeur approchée de e est $e \approx 2{,}71828$

d) Tableau de variation

x	0		1		e		$+\infty$
f'(x) = 1/x	||	+	1	+	1/e	+	
f(x) = ln(x)	|| $-\infty$		0		1		$+\infty$

e) Courbe représentative



C) Dérivation et primitives

1) Dérivation

On a vu que par définition, (ln x)' = 1/x

On va appliquer la dérivation des fonctions composées au logarithme népérien : soit u(x) une fonction positive sur I et ln(u) la fonction à dériver : on aura

(ln(u(x)))' = u'(x) (ln' (u(x))) = u' * 1 / u = u' / u sur I.

Exemples :

. $(\ln(x^2-2x+3))'=\frac{2x-2}{x^2-2x+3}$

.$(\ln(2\sin(x)+3x))'=\frac{2\cos(x)+3}{2\sin(x)+3x}$

b) Primitives

On sait donc désormais dériver ln(u(x)) mais aussi trouver la primitive de u'/u, qui est ln(u(x)) + c.

Ceci est vrai à une nuance près : il faut que u soit positive sur l'intervalle considéré. Si ce n'est pas le cas, on aura comme primitive ln(-u(x)) + c (vérification facile).

Dans le cas général, les primitives de u'/u sont donc les fonctions de la forme ln(|u(x)|) + c.

Exemples :

I) Trouver les primitives de $\frac{1}{3x+5}$ pour x > -5.

F(x) = **ln(3 x + 5) + c**

II) Trouver les primitives de tan(x) pour cos(x) non nul

F(x) = - ln(|cos(x)|) + c = **ln (1/cos(x)) + c**

III) Trouver les primitives de $\frac{2x+1}{x^2+x-3}$ pour $x^2 + x - 3 > 0$

F(x) = **ln(x² + x – 3) + c**

IV) Trouver les primitives de **tan(x)** pour cos(x) < 0

F(x) = - ln(- cos x) + c = **ln (-1 / cos(x)) + c**

V) Primitives de $\frac{1}{2x-5}$ pour x < 2,5

F(x) = $\frac{\ln(5-2x)}{2}+c$

D) Croissances comparées de ln(x) et de x^n

Quand x → +∞, ln(x) → +∞ et $x^n \to +\infty$.

On voudrait voir quelle fonction croît le plus vite.

Pour cela, on va comparer ln(x) et x en étudiant f(x) = $\frac{\ln(x)}{x}$ quand x > 0.

Or, soit $g(x)=\ln(x)-\sqrt{(x)}$: on a $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2-\sqrt{x}}{2x}$, qui est positif si x est plus petit que 4, et négatif dès que x est supérieur à 4. Donc, g(x) atteint son maximum pour x = 4, la valeur de ce maximum étant g(4) = ln(4) – 2 qui vaut à peu près -0,6137, donc négatif.

On aura donc toujours g(x) négative, soit ln(x) plus petit que $\sqrt{x}$.

Comme x > 0, ln x < $\sqrt{x}$ ==> $\frac{\ln(x)}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, qui tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini.

On aura donc aussi $\frac{\ln(x)}{x}\to 0$ lorsque $x\to+\infty$, car ln(x) est x sont positifs dès que x est assez grand (supérieur à 1 !).

Ceci est d'autant plus vrai avec x^n si n > 1, d'où le résultat :

ln(x) croît moins vite que x^n lorsque x tend vers l'infini, ou encore :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x^n}\right)=0$$

De la même façon, on peut voir (en raisonnant sur 1/x) que :

$$\lim_{x\to 0}\left(x^n\ln(x)\right)=0$$

E) Logarithme décimal, échelle logarithmique

1) Définition

On appelle logarithme décimal et on note log la fonction $\log(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$ définie sur R^{+*}.

2) Particularités

Calculez log(10) ! On trouve bien sûr log(10) = 1.

$\log(10^4) = 4\log(10) = 4$

$\log(10^n) = n\log(10) = n$

Soit x un nombre positif quelconque : la partie entière de log(x) est égale à son nombre de chiffres avant la virgule (en système décimal) moins 1 !

Exemples (vérifiez sur votre calculatrice !) :

Si x est dans [10 ; 100[, il s'écrit avec deux chiffres, son log aura 1 comme partie entière.

Entre 100 et 1000 (non compris), log(x) = 2,... etc...

3) Échelle logarithmique

En physique, on est parfois amené à travailler sur des grandeurs très variables : fréquences de 10Hz à 10 MHz, puissances sonores en décibels, etc.…

Pour pouvoir représenter ces grandeurs, on utilise souvent une "échelle logarithmique" c'est à dire qu'au lieu de graduer directement, on gradue par le logarithme décimal.

Exemple :

1 cm = 10, 2 cm = 10^2, 3 cm = 10^3 etc...

Classique	1	10	20	30	40	50	60	70	80
Logarithmique	0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8

Exercices :

Pour la rentrée : Ex 72 et 74 page 105

F) Approximation affine de ln(1 + x) quand x est proche de 0

1) Recherche de l'approximation affine

On sait que si f(x) = ln(x + 1), f'(x) = $\dfrac{1}{x+1}$

Par la définition de la dérivée, on sait que f(1 + x) – f(1) = x f'(1) + x h(x) avec $\lim_{x\to 0}(h(x))=0$.

Donc, f(1 + x) = ln(1) + x $\dfrac{1}{1}$ + x h(x) = x + x h(x)

Soit $\dfrac{f(1+x)}{x}=1+h(x)\to 1$ quand x tend vers zéro.

x est donc une approximation affine de ln(1 + x) quand $x\to 0$.

2) Application

Trouver la limite en 1 de f(x) = $\frac{\ln(x)}{x-1}$ définie sur]0 ; +∞[.

$\ln(x) \to 0$ et x – 1 aussi donc on a une forme indéterminée !

On pose alors x = 1 + h d'où f(h) = $\frac{\ln(1+h)}{h}$ et x → 1 donc h → 0
D'où la limite, qui est 1.

Les logarithmes – Fiche de révision

Définition du logarithme népérien

C'est la fonction nommée ln(x) telle que $\boxed{(\ln(x))'=\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \ln(1)=0}$

Propriétés

$\ln(1)=0$	$\ln(e)=1$
$\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$	$\ln(a^b)=b\ln(a)$
$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$	$\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)$
$\ln(\sqrt{(x)})=\frac{\ln(x)}{2}$	$\ln\left(\frac{1}{a^b}\right)=-b\ln(a)$

Dérivées et primitives

$\boxed{(\ln(u))'=\frac{u'}{u}}$

$\boxed{\text{Si} \quad f(x)=\frac{u'}{u} \quad \text{Alors} \quad F(x)=\ln(u)+c}$

Limites

$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x^n}\right)=0}$

$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^n}{\ln(x)}\right)=+\infty}$

et

$\boxed{\lim_{x\to0_+}(x^n\ln(x))=0}$

$\boxed{\lim_{x\to0_+}\left(\frac{1}{x^n\ln(x)}\right)=-\infty}$

Logarithme décimal

$\boxed{\log(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(10)}}$ **d'où :** $\boxed{\log(10)=1}$ **et** $\boxed{\log(10^n)=n}$

Approximation affine de ln(1+x) quand x → 0

$\boxed{\text{Quand } x \to 0, \ \ln(1+x) \sim x.}$ **(x est une bonne approximation de ln(x))**