Chapitre 6 – Les probabilités

A) Rappels de première

1) Vocabulaire

a) Expérience aléatoire :

C'est une expérience dont le résultat (alea = dé en latin) dépend du hasard.

b) Issue

C'est un résultat possible de l'expérience aléatoire.

c) Univers :

C'est l'ensemble des issues, soit l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire (notation : Ω = oméga majuscule).

d) Événement :

C'est un sous-ensemble de l'univers, c'est à dire un ensemble d'issues de l'expérience..

e) Événement élémentaire :

C'est un sous-ensemble de l'univers ne contenant qu'un élément (c'est à dire une seule issue).

f) Contraire :

C'est l'événement contraire d'un événement A, noté $\bar{A}$, est l'ensemble des issues (éléments) de l'univers qui ne sont pas dans A.

g) A ∩ B :

L'événement A ∩ B (lire A inter B), aussi appelé «A et B», est l'ensemble des issues qui sont dans A et dans B à la fois.

h) A ∪ B :

L'événement A ∪ B (lire A union B), aussi appelé «A ou B» , est l'ensemble des issues qui sont dans A ou dans B ou dans les deux.

i) Événements disjoints :

Deux événements A et B sont «incompatibles» ou «disjoints» si A et B n'ont aucune issue en commun, donc aucun élément commun (A ∩ B = Ø).

j) Exemple :

Dans ma trousse, j'ai 3 crayons (1 noir, 1 bleu et 1 rouge) et trois stylos billes dans les mêmes couleurs.
Je considère l'expérience aléatoire suivante : "prendre un objet dans la trousse".
On aura :

Ω = ?	*{Cn ; Cb ; Cr ; Sn ; Sb ; Sr}*
A = "prendre un crayon" = ?	*{Cn ; Cb ; Cr}*
B = "Prendre un rouge" = ?	*{Cr ; Sr}*
Ä = ?	*{Sn ; Sb ; Sr}*
C = "Prendre un bleu" et B sont ?	*incompatibles*

2) Probabilité

a) Préambule

Nous n'envisagerons que des problèmes où l'univers est fini (le nombre de résultats possibles de l'expérience aléatoire est donc limité).

b) Définition

On appelle probabilité une application qui à chaque événement associe un nombre compris entre 0 et 1 et qui a les propriétés suivantes :

- ***La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires contenus dans cet événement.***

- ***La probabilité de l'événement constitué par l'univers lui-même est égale à 1, (autrement dit, la somme des probabilités de tous les événements élémentaires de l'univers est égale à 1).***

Exemples :

1) Reprenons l'exemple de la trousse : la probabilité correspond au nombre de chances de sortir un objet divisé par le nombre total de chances.
Si j'ai 1 chance sur 10 de sortir le crayon noir, 2 chances sur 10 de sortir le crayon bleu, 5 chances sur 10 de sortir le crayon rouge (disons que c'est le plus gros…), 1 chance sur 10 de sortir le stylo rouge, 1 sur 10 pour le stylo noir et 1 sur 10 pour le stylo bleu, ceci définit-il une probabilité valide ?

(Non, la somme dépasse 1, c'est donc impossible !)

Si on met 4 au lieu de 5 pour le crayon rouge, cela fait-il une probabilité valide ?

(oui, cette fois ça va)

2) Prenons un dé à 6 faces bien équilibré : quelle est normalement la probabilité de tirer un 2 ?

(1chance sur 6, soit 1/6)

Et si le dé est truqué pour que le 6 apparaisse 2 fois plus souvent que les autres ?

(2 chances sur 7, soit 1/7)

c) Propriétés

On notera Ω l'univers, p la probabilité, A et B deux événements.

I) Pour tout A, $0 \leq p(A) \leq 1$

II) $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

III) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Exemple :

Dans le cas de la trousse avec p corrigée : calculer p ("crayon"), p("pas crayon"), p("rouge") et p("crayon ou rouge").

(7/10 ; 3/10 ; 5/10 ; 8/10)

3) Équiprobabilité

a) Définition

Dans un univers Ω, on dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité (on dit qu'ils sont **équiprobables**).

Exemple :

Dans le jet d'un dé équilibré, chaque chiffre de 1 à 6 est équiprobable.

Remarque :

Pour une même expérience aléatoire, un univers peut être équiprobable et un autre non, selon la définition que l'on fait de l'univers des résultats.

Par exemple, si on lance deux dés et qu'on regarde l'univers comme l'ensemble des sommes des deux chiffres obtenus, on n'est pas dans un cas d'équiprobabilité, alors que si on considère l'univers des résultats comme l'ensemble des couples (a, b) où a est le chiffre du premier dé et b celui du second, on obtient effectivement un univers équiprobable.

b) propriétés

Si Ω contient n éléments, chaque événement élémentaire de Ω aura une probabilité de 1/n.
En effet, la probabilité de chaque résultat est la même et leur somme doit faire 1.
En conséquence, si A contient a événements élémentaires, p(A) = a/n.

Exemple :

Soit à lancer un dé non truqué, calculer p(A = «j'ai fait plus que 2»)

(A = {3 ; 4 ; 5 ; 6} soit 4 éléments, donc p(A) = 4/6)

B) Variable aléatoire

1) Définition

On appelle variable aléatoire X une fonction qui associe à tout résultat (événement élémentaire) un nombre réel.

Exemple :

Soit le jeu de dés suivant : quand on fait 6 on gagne 100 F, quand on fait 1 on gagne 50 F, et de 2 à 5 on perd 40 F.
Le gain (négatif si c'est une perte) est une variable aléatoire, définie par $X(\{6\}) = 100$, $X(\{1\}) = 50$ et $X(\{2\}) = X(\{3\}) = X(\{4\}) = X(\{5\}) = -40$.

2) Vocabulaire, notation

- Soit X une variable aléatoire et soit l'événement élémentaire A : si X(A) = a, on dit que a est la valeur prise par X pour l'événement A.

- On appelle "X = a" l'événement (pas forcément élémentaire) qui contient tous les résultats pour lesquels X prend la valeur a.

Exemple :

Dans le jeu ci-dessus, calculer la probabilité de l'événement A = "X = - 40"

(A = {2 ; 3 ; 4 ; 5}, p(A) = 4/6 = 2/3.)

3) Loi de probabilité d'une variable aléatoire

a) Définition

Soit un univers Ω, muni d'une probabilité p, et soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_1, x_2, …, x_n.
La loi de probabilité de X est la fonction qui à chaque x_i fait correspondre p("X = x_i").
Lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité, on pourra noter p(X = x_i) ou même p(x_i).

b) Exemple

Toujours dans le même jeu de dés, calculer p("X = 100") et p("X = -40").

(p(X=100) = 1/6 ; p(X=-40) = 4/6)

c) Application

Soit l'expérience consistant à lancer deux dés en vue se calculer la somme des deux chiffres obtenus.

Pour pouvoir faire des calculs, on définira Ω comme l'ensemble des couples de chiffres obtenus, et on notera Ω = {11 ; 12 ; 13 ; … ; 16 ; 21 ; 22 ; …. ; 66}, qui est donc un univers équiprobable (preuve par la mise en arbre)

On définit alors S comme la variable aléatoire "somme de deux chiffres obtenus", avec comme valeurs possibles {2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12}.

Le "2" ne pouvant être obtenu qu'avec le couple 11, sa probabilité sera de 1/36 (car il y a 36 éléments dans Ω , vu qu'il y a 6*6 = 36 couples.

Le "3" peut être obtenu avec 12 et 21, donc p(S=3) = 2/36.

Faire le tableau de la loi de probabilité de S.

S	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p(S)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

4) Fonction de répartition

a) Définition

De la même façon qu'on a défini la loi de probabilité X, on peut définir la "fonction de répartition" de X, en considérant non plus l'événement "X = x" mais l'événement "X ≤ x", qui n'est autre que la réunion de tous les événements "X = y" pour tous les y ≤ x.
On notera F(x) = p("X ≤ x") ou p(X ≤ x) pour simplifier.

Exemple et interprétation :

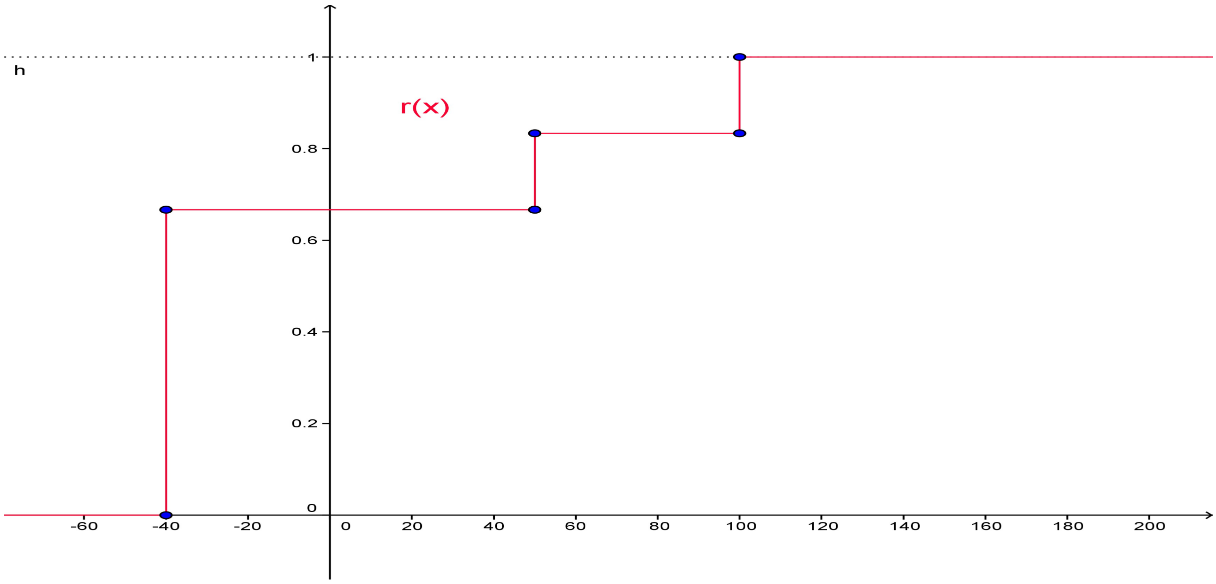
Toujours dans le jeu ci-dessus, posons-nous la question "Quelle probabilité y a-t-il que je ne gagne pas de l'argent ?".
Mathématiquement, cela revient à calculer p(X ≤ 0) :

(p(X ≤ 0) = p(X = -40) = 4/6 = 2/3)

c) Propriétés

Les fonctions de répartition sont des fonctions croissantes en forme d'escalier, commençant à zéro et finissant à 1.

Exemple du jeu :



Remarque :

En univers infini, les fonctions de répartition sont toujours croissantes mais ne sont plus nécessairement en escalier.

5) Espérance mathématique d'une variable aléatoire

a) Signification

L'espérance mathématique est l'équivalent en probabilités de la moyenne pondérée par les fréquences en statistiques.
En langage courant, c'est la valeur moyenne que prendrait cette variable aléatoire sur un très grand nombre d'expériences aléatoires identiques et indépendantes.

b) Définition

L'espérance mathématique E(X) d'une variable a. X prenant les valeurs x_1, x_2, …. x_n ? est le nombre noté E(X) tel que :

$$\boxed{\mathbf{E(X) = x_1\, p(X=x_1) + x_2\, p(X=x_2) + \ldots + x_n\, p(X=x_n)}}$$

c) Exemple

Toujours le même jeu :
E(X) = 100 p(X=100) + 50 p(X=50) – 40 p(X=-40)
E(X) = 100/6 + 50/6 - 40*4/6 = (100 + 50 -160)/6.
E(X) = - 10/6 (on est donc perdant si on joue assez longtemps !).

On appelle "équitable" un jeu dont l'espérance de gain est égale à zéro.

6) Variance et écart type

a) Signification

Ceci représente la "dispersion" des valeurs que peut prendre la variable aléatoire autour de son espérance.

b) Définitions (mêmes notations que ci-dessus)

Variance : $\boxed{\mathbf{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = x_1^2\, p(X = x_1) + x_2^2\, p(X = x_2) + \ldots + x_n^2\, p(X = x_n) - (E(X))^2}}$

Écart-type : $\boxed{\sigma(X)=\sqrt{V(X)}}$.

<u>Note :</u> on démontre aussi que $\boxed{\mathbf{V(X) = E((X - E(X))^2)}}$.

<u>c) Exemple</u>

Calculer V(X) et σ(X) pour le jeu vu plus haut.

$E(X^2) = 100^2\ p(X=100) + 50^2\ p(X=50) + (-40)^2\ p(X=-40)$

$E(X^2) = (10\ 000 + 2\ 500 + 160 * 4) / 6 = 18\ 900 / 6 = 3\ 150$

$V(X) = 3\ 150 - (-10 / 6)^2 = 3\ 150 - 25 / 9 \approx 3\ 147$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}\approx\sqrt{3147}\approx 56{,}1$.

<u>Exercices</u>

Page 21 N° 1, 2, 3.
Page 224 N° 14, 17
Page 225 N° 19, 22, 27 (suite)

<u>Problèmes</u>

39 page 230
40 page 230
38 page 229

Probabilités – Fiche de révision

Propriétés des lois de probabilité

$p(\Omega) = 1$ **$p(\varnothing) = 0$**

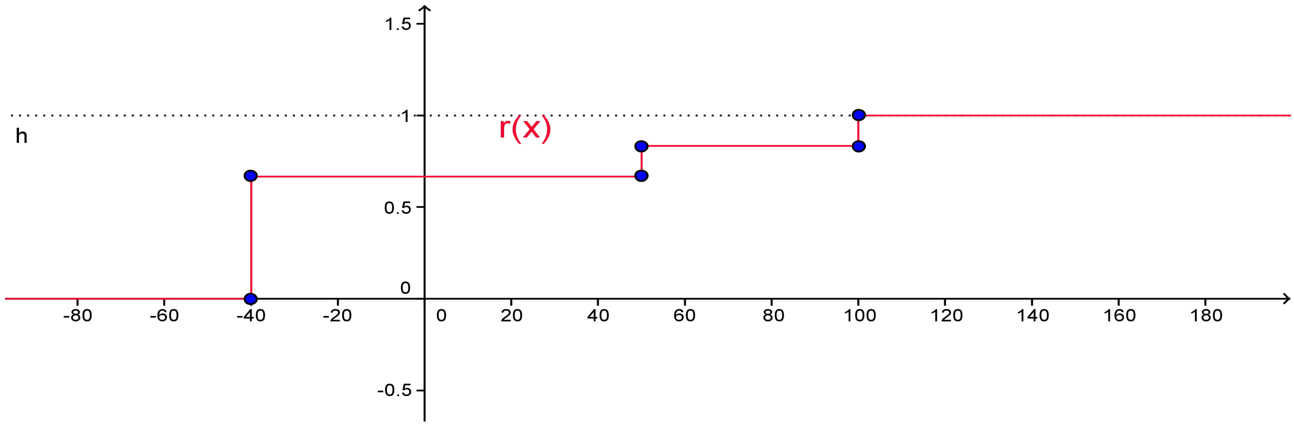
$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ **$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$**

Si Ω est un univers équiprobable de *n* éléments
et si A est un événement comportant *a* éléments :

$$p(A)=\frac{a}{n}$$

Fonction de répartition

Fonction en escalier, croissante de 0 à 1, augmente pour chaque valeur de la variable aléatoire de la probabilité de cette valeur, et finit à 1 après la dernière valeur.



Espérance mathématique d'une variable aléatoire X

L'espérance mathématique est l'équivalent en probabilités de la moyenne pondérée par les fréquences en statistiques. C'est la valeur <u>moyenne</u> que prendrait cette variable aléatoire sur un <u>très grand nombre</u> d'expériences aléatoires identiques et indépendantes.

$$\boxed{E(X) = x_1\, p(X=x_1) + x_2\, p(X=x_2) + \dots + x_n\, p(X=x_n)}$$

Variance et écart-type d'une variable aléatoire X

Ils représentent la "dispersion" des valeurs que peut prendre la variable aléatoire autour de son espérance. L'avantage de l'écart-type est d'être exprimé dans la même unité que la variable.

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = x_1^2\, p(X = x_1) + x_2^2\, p(X = x_2) + \dots + x_n^2\, p(X = x_n) - (E(X))^2}$$

$$\boxed{\sigma(X)=\sqrt{V(X)}}$$

On a aussi : $\boxed{V(X) = E((X - E(X))^2)}$