Chapitre 7 – Applications de la dérivation

A) Dérivée et tableau de variation

1) Sens de variation

Théorème (admis) :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, de dérivée f' :
. Si f' est strictement positive sur I, Alors f est strictement croissante sur I.
. Si f' est strictement négative sur I, Alors f est strictement décroissante sur I.
. Si f' est nulle sur I, Alors f est constante sur I.

2) Extremum local

a) Définitions

Dire qu'un réel m = f(a) est un maximum (resp. minimum) local de f signifie qu'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $\forall x \in I, f(x) \leq m$ (resp. $\forall x \in I, f(x) \geq m$).
On appelle extremum un maximum ou minimum local.

Soit D une partie du domaine de définition de f :
On appelle minorant (resp. majorant) de f sur D tout réel m (resp. M) tel que :
$\forall x \in D, f(x) \geq m$ (resp. $\forall x \in D, f(x) \geq M$).
Le plus petit minorant (resp. majorant) de f sur D s'appelle le minimum (resp. maximum) de f sur D.

Remarque :

Le minimum et le maximum peuvent ou non être atteints par f sur D.

Exemples :

Sur]0 ; +∞[, le minimum de f(x) = 1/x est 0, mais il n'est pas atteint.

Pour $f(x) = x^2$, sur [2 ; 4[, le minimum atteint est 4, le maximum non atteint est 16.

Pour $f(x) = (1 + x)^2$, sur]- 5 ; 2], on a un maximum non atteint de 16 et un minimum atteint de 0, atteint pour x = -1, et qui est aussi le minimum sur cet intervalle (et sur $\mathbb{R}$ d'ailleurs).

b) Propriétés

L'étude du signe de la dérivée permet de découvrir les extremums locaux d'une fonction.

Théorème :

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I contenant a, et si sa dérivée f' est négative (resp. positive) à gauche de a et positive (resp. négative) à droite de a, Alors f admet un minimum (resp. maximum) local en a, de valeur f(a), et on aura f'(a) = 0.

Réciproque :

Si une fonction f dérivable sur]a – α ; a + α[admet un extremum en a, alors sa dérivée s'annule en a : f'(a) = 0, et elle change de signe en a.

3) Application

Pour étudier le sens de variation d'une fonction, et donc pour établir son tableau de variation, on commencera désormais par calculer sa dérivée et étudier son signe.

Exemple :

x	-∞	2	3	4	+∞

f'(x) = 2x - 6	-	|	-	0	+	|	+
f(x) = (x – 2)(x - 4)	décroissante	0	décroissante	8	croissante	0	croissante

B) Équations f(x) = 0

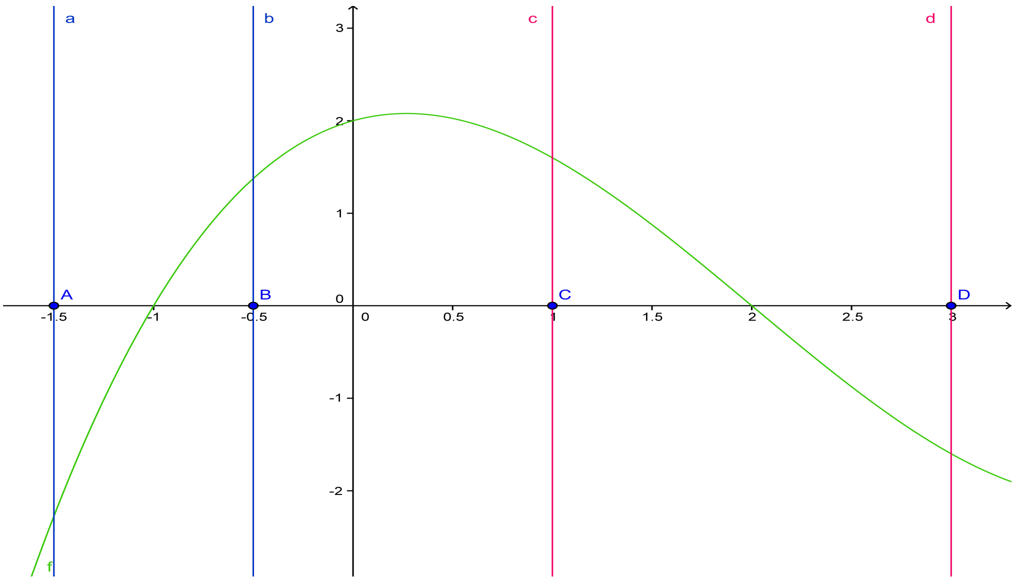
1) Encadrement d'une solution

Théorème :

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I=[a ; b] strictement monotone (croissante, ou décroissante) sur I telle que f(a) et f(b) sont de signe contraire : alors, f s'annule en un unique point x de I, c.à.d $\exists ! x \in I$ ***tel que*** $f(x)=0$ *(le ! veut dire "unique").*

Exemple :

f(x) = (x + 1) (x – 2) (x – 5) / 5



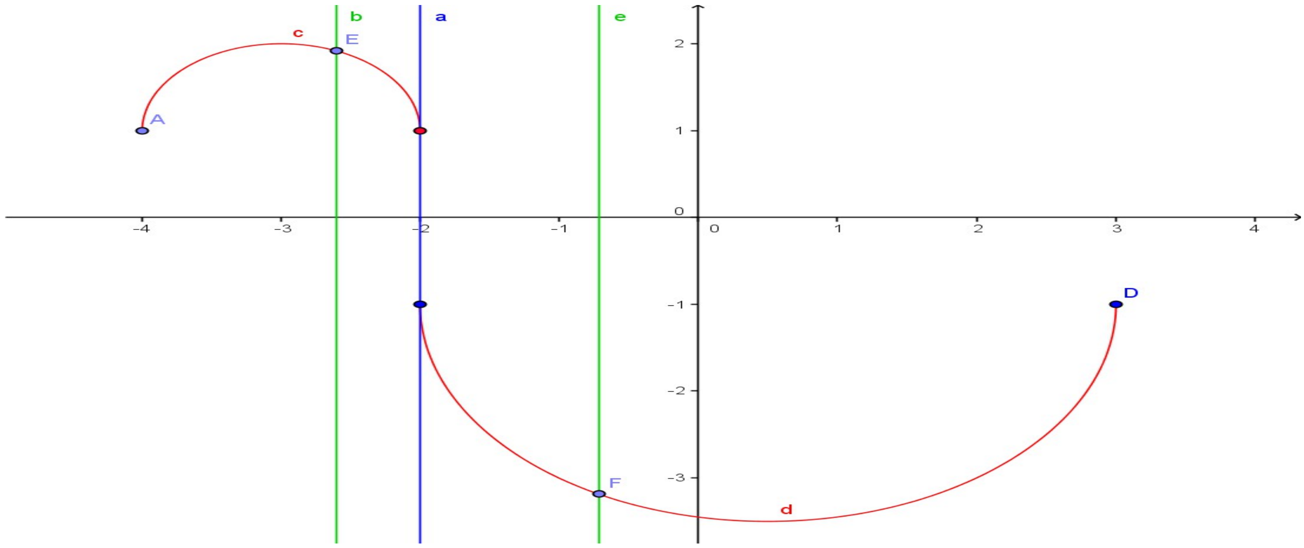
Entre A et B, f est strictement croissante et change de signe. Comme elle est visiblement dérivable, elle s'annule donc en un point unique situé entre A et B.

Entre C et D, f est strictement décroissante et change de signe. Comme elle est visiblement dérivable, elle s'annule donc en un point unique situé entre C et D.

2) Importance de la dérivabilité

La dérivabilité assure la "continuité", c'est-à-dire que la courbe est d'un seul tenant, on peut la tracer sans lever le crayon.

Si la fonction n'est pas continue (et donc non dérivable), le théorème ne marche pas :



La fonction rouge n'est pas continue en x = -2, ce qui lui permet d'être décroissante strictement entre les points E et F, de changer de signe, et de ne pas passer par 0 !

L'équation f(x) = 0 n'a pas de solution entre E et F.

Remarque :
La fonction peut être continue sans être dérivable et cela suffit pour le théorème.

3) Compléments

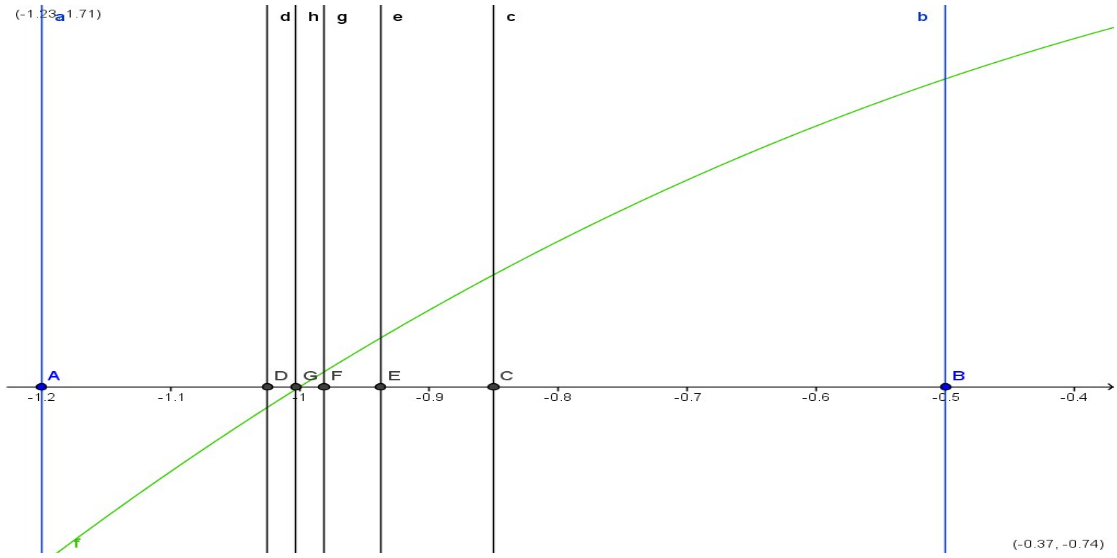
- Interprétation graphique :
Si on a tracé la courbe de f(x), les solutions de f(x) = 0 sont les abscisses des points d'intersection de cette courbe avec la droite (Ox), droite des abscisses.

- Pour résoudre une équation f(x) = g(x), on peut se ramener au cas précédent en la transformant en f(x) – g(x) = 0

- Attention au cas où la fonction est croissante (ou décroissante) mais pas strictement. Il peut alors y avoir plusieurs solutions si la courbe est "plate" sur un segment de (Ox).

- Méthode de recherche d'une solution approchée de f(x) = 0
Si f(a) . f(b) < 0 (càd si f(a) et f(b) de signes contraires), si f est monotone sur [a ; b] et si f est dérivable sur [a ; b], on sait qu'il y a une solution unique entre a et b, donc il suffit de procéder ainsi :

- On calcule le nombre $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$,
- On regarde s'il est du signe de f(a) ou f(b),
- On remplace celui des deux (a ou b) dont l'image a le même signe par $\frac{a+b}{2}$,
- On recommence jusqu'à avoir b – a aussi petit que désiré, le nombre $\frac{a+b}{2}$ sera la solution exacte à $\frac{b-a}{2}$ près.

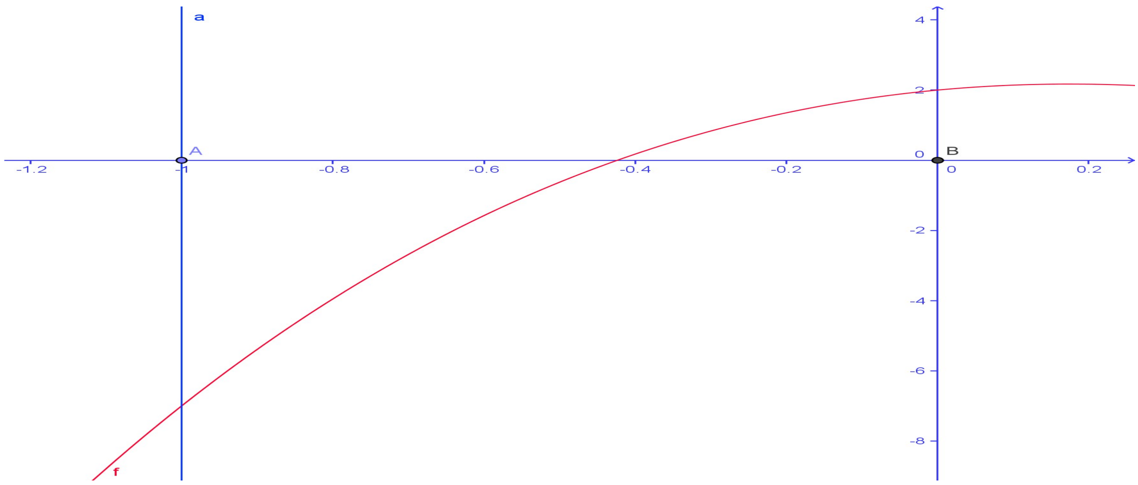


Cette méthode est très rapide puisqu'on double la précision à chaque fois !

On l'appelle la méthode par **dichotomie**, ou méthode **dichotomique** (en grec ancien, cela veut dire "couper en deux", cf "atome", "qu'on ne peut pas couper").

__Exemples :__

Trouver à 0,01 près la solution de l'équation $x^3 - 6x^2 + 2x + 2 = 0$ entre les réels -1 et 0.



__Exercices__